

**IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ELEMENTO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL SUBMETIDO À VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME**

 <https://doi.org/10.56238/sevened2024.041-018>

**Christopher Rabelo Centofante**

Graduação em Engenharia Civil

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde – Goiás, Brasil

**Michell Macedo Alves**

Doutor em Engenharia de Estruturas pela USP, São Paulo, Brasil

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde – Goiás, Brasil

**Agda Rabelo Centofante**

Doutora em Agronomia

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Rio Verde – Goiás, Brasil

**Elias Centofante**

Mestre em Ecologia e Conservação

Universidade Estadual de Mato Grosso, Campus Universitário de Xavantina- MT, Brasil

---

**RESUMO**

O desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de estruturas tem solucionado problemas estruturais. Todavia, devido a limitações existentes para usuários que não possuam a licença completa ou simplesmente a ferramenta não possui determinada função, as análises podem se restringir a modelos teóricos mais limitados que não considerem fenômenos da ação de temperatura em estruturas. Sendo assim, este trabalho propõe o desenvolvimento de um código computacional gratuito e educacional capaz de calcular deslocamentos e esforços solicitantes em pórticos tridimensionais submetidos à variação uniforme de temperatura. Este código foi implementado na linguagem Python na plataforma Visual Codes. O código possui quatro processos para sua criação, o primeiro sendo a revisão bibliográfica, o segundo a construção do código, o terceiro realizar o teste para verificar a funcionalidade e por fim comparar os resultados com exemplos da literatura. Foi desenvolvido o código que cumpriu os objetivos estabelecidos neste trabalho, uma ferramenta educacional gratuita para o cálculo de pórticos tridimensionais com influência de temperatura uniforme, tendo quatro validações para o mesmo, sendo a primeira mais simples, uma barra engastada no eixo X com deslocamento somente nesse eixo, o segundo um grupo de materiais com deslocamento apenas no eixo X, o terceiro um pórtico em duas dimensões, sendo X e Y com temperatura uniforme em uma barra e a última mais complexa, um pórtico tridimensional composto de 4 pilares e 4 vigas com adição de temperatura uniforme na parte superior da estrutura. Os resultados foram compatíveis com os obtidos na literatura.

**Palavras-chave:** Análise Matricial. Dilatação Térmica. Método da Rigidez. Pórtico Tridimensional.



## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico trouxe avanço em todas as áreas do conhecimento, auxiliando os seres humanos em suas tarefas, com a Engenharia Civil não foi diferente. Atualmente, é praticamente impossível executar um projeto de construção sem a ajuda de algum software, gerando facilidades que vão desde uma planilha do Excel até programas que são capazes de executar desenhos, cálculos, representações e simulações, facilitando o trabalho de engenheiros, tais como: o AutoCAD que é um dos softwares do tipo CAD mais conhecido do mundo, o Revit é baseado na tecnologia BIM, ao contrário do AutoCAD, o SketchUp, TQS é um software do tipo CAD, produzido por brasileiros, voltado para o projeto de estruturas em concreto armado, em alvenaria estrutural, entre outros.

Para compreender o comportamento das estruturas em cada tipo de edificação, faz-se necessário a utilização de “softwares” de cálculos pelo método dos elementos finitos e ensaios reais nas mais adversas condições e conhecer os aspectos que influenciam as estruturas em altas temperaturas destacando-se a redução da resistência mecânica e o módulo de elasticidade dos elementos estruturais da edificação, conduzindo a deformações adicionais, podendo levar a estrutura ao colapso. Porém, para ter acesso a essas ferramentas, geralmente, deve-se comprar suas licenças de usos, que em muitos casos possuem um custo elevado para os iniciantes, havendo necessidade de recorrer a outros softwares mais acessíveis.

Uma opção de ferramenta é o Python, de código livre (open source) disponibilizado em diversas plataformas, criado em 1991 (sua primeira versão) pelo holandês Guido Van Rossum, é uma linguagem de fácil interpretação que exige mais da máquina e menos do programador sendo, portanto, uma linguagem facilmente legível, que não prioriza a velocidade de execução, essa linguagem é amplamente utilizada devido ao vasto número de bibliotecas gratuitas disponíveis, que possibilitam uma infinidade realizações, onde é possível utilizá-la para compilar uma análise matricial da estrutura desejada, que será no caso de um pórtico espacial. De acordo com Kassimali (2015), a análise matricial é a previsão dos resultados de ações sobre uma estrutura, essas ações podem ser cargas e/ou efeitos externos, como movimentação dos apoios ou alteração de temperatura.

A análise estrutural é parte essencial ao projeto estrutural, segundo Martha (2017), “tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída”. Para tanto, há de se conhecer tanto as ações atuantes sobre a mesma, como seu comportamento que, de modo geral, pode ser expresso por seus esforços solicitantes e deslocamentos

As metodologias que utilizam linguagem de programação possuem a capacidade de gerar resultados que condizem com a realidade com bastante fidelidade. Além disso, possuem segurança, pois estão em um ambiente virtual, possibilitando testes diversos e novas abordagens, garantindo uma grande variedade de arranjos.

Este trabalho tem como finalidade à compreensão do comportamento estrutural de pórtico espacial metálicos com variação uniforme de temperatura, gerando como resultado deslocamento, esforços e reações devido à variação, restringido apenas à variação uniforme de temperatura, assim como a elaboração de um código open source na linguagem Python, proporcionando maior conhecimento no uso de linguagens computacionais, podendo ser uma ferramenta educacional no processo de ensino e aprendizagem para acadêmicos do Curso de Engenharia Civil, onde sua abordagem deve ser contextualizada e clara, servindo também para avaliar os efeitos da temperatura em pórticos tridimensionais gerando deformações, alterando as estruturas internas, assim como esforços solicitantes e reações de apoio.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 PÓRTICO

Os pórticos são estruturas planas lineares e coplanares formadas pela associação de barras retas articuladas entre si e não concorrentes com cargas ativas e reativas. São resultados da associação entre pilares e vigas de estruturas maciças ou ocas. Os pórticos, juntamente com os elementos portantes secundários, formam o esqueleto resistente do sistema construtivo, no qual são fixados os elementos de cobertura e fechamento lateral. A união destes elementos é normalmente considerada pelos projetistas como ligações perfeitamente rígidas ou ligações perfeitamente articuladas. (Soares; Hanai, 2001).

Figura 1 - Pórticos in natura.



Fonte: Fachini Engenharia Civil

Kimura (2018), define como pórtico espacial um modelo tridimensional no qual compreende a estrutura na totalidade, sem restrições no posicionamento dos nós e direcionamento das barras, permitindo, dessa forma, a aplicação concomitante de ações verticais e horizontais. Assim, este modelo estrutural traduz o tipo mais comum de estruturas reticuladas, haja vista que representam todos os pilares e vigas presentes em um edifício, o que permite uma avaliação completa e eficiente do comportamento global da estrutura.

Os pórticos estão sujeitos a esforços de compressão, tração, flexão, torção e cisalhamento. Os carregamentos e esforços aplicados no pórtico podem variar conforme a posição das barras e carregamentos. E na verificação de sua estabilidade é considerado para cada barra os seguintes esforços: Força Normal (N), Força Cortante (V) e Momento Fletor (M). Um pórtico estável possui todas as barras estáveis em relação aos três esforços.

## 2.2 EFEITOS DE TEMPERATURA

Azkune, Puente e Insausti (2007), definem a variação da temperatura ambiente como o fator-chave para a redistribuição de tensões na estrutura, principalmente durante a construção. Devido à interação com as condições climáticas do ambiente, a temperatura do concreto fresco sofre grande redução e seu volume diminui, isto é, a peça se contrai, originando tensões térmicas que irão tracioná-la, gerando fissuração de origem térmica (Santos, 2012).

Estas variações podem ser uniformes ou até mesmo apresentar gradientes térmicos e, conseqüentemente, os elementos reticulados de uma estrutura podem estar sujeitos a variações de temperatura distintas para suas faces superior e inferior (Martha, 2017).

Em situações mais críticas as estruturas de concreto podem ser submetidas acidentalmente a altas temperaturas ou estas podem compor parte de suas condições usuais de trabalho. Para a maioria dos materiais estruturais, a deformação térmica é proporcional à diferença de temperatura (Gere, 2003; Hibbeler, 2004).

A resistência do concreto quando submetido a temperaturas consideráveis ocorre devido às características térmicas dos materiais que o compõe, dentre as quais se destaca coeficiente de dilatação, dentre outros. Porém, o aumento da temperatura nos elementos de concreto provoca redução no módulo de elasticidade e na resistência características de seus materiais constituintes, havendo prejuízos na rigidez do elemento. Esses efeitos térmicos estão associados à dilatação térmica e à degradação das propriedades mecânicas devido ao aumento da temperatura (Rigobello, 2011).

Uma solução para esses problemas é realizar uma operação matemática que leva em conta o material da estrutura e a variação de temperatura, mais conhecida como dilatação térmica linear que consiste na seguinte fórmula:

$$\Delta L = L_i \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad \text{Equação (1)}$$

Onde:

$\Delta L$  = Variação de comprimento

$L_i$  = Comprimento inicial

$\alpha$  = Coeficiente de dilatação do material

$\Delta T$  = Variação de temperatura.



Em casos em que não há aplicação de força, se torna necessário fazer a dedução que relaciona a deformação pela força com a temperatura, ficando da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_{\Delta T} \\ \frac{F \times L}{E \times A} &= \alpha \times \Delta T \times L \\ F &= \alpha \times \Delta T \times E \times A\end{aligned}$$

### 2.3 ANÁLISE MATRICIAL

Com os avanços na tecnologia estrutural, tem-se cada vez mais a exigência de maior rapidez na análise e precisão nos sistemas estruturais, devido à necessidade de demonstrar segurança estrutural, com isso, houve uma necessidade de desenvolver métodos mais precisos de análise, uma vez que os métodos convencionais são satisfatórios quando utilizados em estruturas simples, mais quando aplicados em estruturas complexas já não são mais satisfatórios, havendo a necessidade de novos métodos que estabelecem com maior precisão quaisquer modificações estruturais que possa ocorrer no projeto.

Os métodos matriciais, atende tanto a exigência de velocidade, quando a precisão de análise para estruturas complexas, onde o computador digital é utilizado não apenas para a solução de equações simultâneas, mas também para todo o processo de análise estrutural, desde os dados iniciais de entrada até a saída final, que representa distribuições de tensões e forças, deflexões, coeficientes de influência, características frequências físicas e formas modais.

Os métodos matriciais baseiam-se no conceito de substituição da estrutura contínua real por um modelo matemático composto por elementos estruturais de tamanho finito (também chamados de elementos discretos) com propriedades elásticas e inerciais conhecidas que podem ser expressas em forma de matriz. As matrizes que representam essas propriedades são consideradas blocos de construção que, quando encaixados de acordo com um conjunto de regras derivadas da teoria da elasticidade, fornecem as propriedades estáticas e dinâmicas do sistema estrutural real. Nos métodos matriciais as partículas são de tamanho finito e tem uma forma especificada. Essas partículas de tamanho finito são chamadas de elementos estruturais, e eles são especificados de forma um tanto arbitrária pelo analista no processo de definição do modelo matemático da estrutura contínua. As propriedades de cada elemento são calculadas, utilizando a teoria da continuidade meio elástico, enquanto a análise de toda a estrutura é realizada para a montagem dos elementos estruturais individuais. Quando o tamanho dos elementos diminui, o comportamento deformacional do modelo matemático converge ao da estrutura contínua (Przemienicki, 1968).

A principal função de qualquer estrutura é suportar e transferir cargas aplicadas externamente aos pontos de reação e, ao mesmo tempo, estar sujeita a algumas restrições específicas e a uma distribuição de temperatura conhecida. Na engenharia civil, os pontos de reação são aqueles pontos da

estrutura que estão fixados a uma fundação rígida. O projetista de estruturas está, portanto, preocupado principalmente com a análise de configurações estruturais conhecidas que estão sujeitas a distribuições conhecidas de cargas, deslocamentos e temperaturas estáticas ou dinâmicas. Do seu ponto de vista, entretanto, o que é realmente necessário não é a análise, mas a síntese estrutural que conduza ao projeto mais eficiente (projeto ótimo) para a carga e temperatura ambiente especificadas. Conseqüentemente, o objetivo final do projeto estrutural não deve ser a análise de uma determinada configuração estrutural, mas a geração automatizada de uma estrutura, ou seja, a síntese estrutural com seus esforços, deslocamentos e reações, que satisfará os critérios de projeto especificados.

De acordo com Przemienicki (1968), os métodos de análise estrutural podem ser divididos em dois grupos: métodos analíticos e métodos numéricos. As limitações impostas pelos métodos analíticos são bem conhecidas. Somente em casos especiais são possíveis soluções de forma fechada. Soluções aproximadas podem ser encontradas para algumas configurações estruturais simples, mas, em geral, para estruturas complexas métodos analíticos não podem ser usados, e métodos numéricos devem ser invariavelmente empregados. Os métodos numéricos de análise estrutural podem ser subdivididos em dois tipos, (1) soluções numéricas de equações diferenciais para deslocamentos ou tensões e (2) métodos matriciais baseados na idealização de elementos discretos.

Dois métodos matriciais complementares de formulação de qualquer problema estrutural são possíveis: o método dos deslocamentos (método da rigidez), onde os deslocamentos são escolhidos como incógnitas, e o método das forças (método da flexibilidade), onde as forças são desconhecidas. Em ambos os métodos, a análise pode ser pensada como uma combinação sistemática de elementos estruturais individuais desmontados numa estrutura montada na qual as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfatórias.

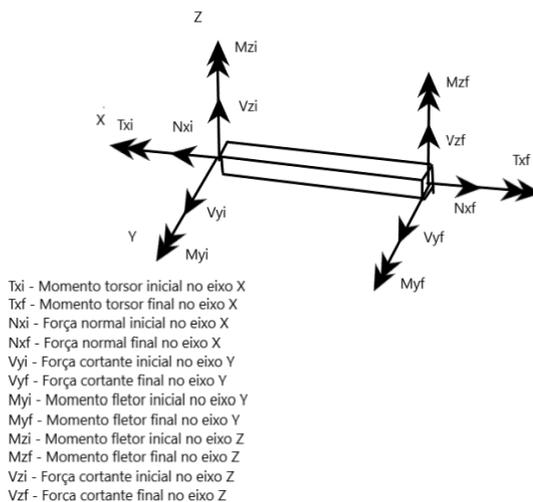
## 2.4 MÉTODO DA RIGIDEZ

Apesar de haver outros métodos para a resolução de análises matriciais utilizando a implementação computacional, o método da Rigidez é o mais utilizado devido sua capacidade de aplicação de métodos numéricos para resolução.

O método da rigidez se utiliza da superposição de deslocamentos aplicados às condições de contorno que garantem o equilíbrio da estrutura. Assim, a análise estrutural na situação estática apresenta-se como um problema de contorno que deve satisfazer o equilíbrio da estrutura analisada (Martha, 2017).

A aplicação desse método exige que a estrutura seja dividida em partes, segundo Hibbler “a aplicação do método da rigidez exige subdividir a estrutura em uma série de elementos finitos discretos e identificar seus pontos extremos como nós”. Em cada elemento temos nós iniciais e nós finais e cada nó possui 6 graus de liberdade, como demonstra a imagem abaixo:

Figura 2 – Elemento tridimensional e Graus de Liberdade.



Fonte: Autor

Como exemplo desse método, pega-se uma barra, como na imagem acima, onde temos seis graus de liberdade ou deslocamentos nodais ( $u$ ) que podem ser relacionados aos esforços nodais externos ( $f$ ) por meio de sua matriz de rigidez ( $k$ ), assim obtém-se a seguinte equação:

$$(f) = [k] \cdot (u) \quad \text{Equação (2)}$$

Onde ( $k$ ) é a matriz de rigidez cuja função é estabelecer a relação de compatibilidade entre forças e deslocamentos no elemento analisado. Como explicado anteriormente, no elemento tem-se 6 graus iniciais e 6 graus, então a matriz ( $k$ ) é formada por 12 colunas e 12 linhas (12x12).

Já os esforços ( $f$ ) refere-se ao movimento de translação no sentido e direção do deslocamento, haverá, então, uma força  $f_1$  correspondente ao esforço normal. Desse modo, por meio das definições de tensão em relação à força de deformação, e relação entre força normal com o deslocamento axial obtém-se a equação.

$$F_1 = \left(\frac{EA}{L}\right) \times u_1 \quad \text{Equação (3)}$$

Onde:

- E = Módulo de elasticidade do material;
- A = Área da seção transversal do elemento;
- L = Comprimento.

Essa equação pode sofrer variações devido às forças nodais, no final tem-se a matriz 12x12 que representa os deslocamentos ocorridos no elemento.

Figura 3 – Matriz de Rigidez para elemento de Pórtico Tridimensional.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Fonte: Gere e Weaver Junior (1987)

Para as reações de apoio e esforços solicitantes, por exemplo, deve-se atentar que não pode ser utilizado a condição de contorno no momento que for multiplicar as matrizes.

## 2.5 MATRIZ DE ROTAÇÃO

Na análise estrutural, a matriz de rotação é usada para transformar as propriedades locais de rigidez e massa de elementos estruturais para o sistema de coordenadas global. Essa matriz é obtida a partir da utilização de seus cossenos diretores, levando-se em consideração as coordenadas globais de seus nós inicial e final, de modo que, a transformação das soluções de uma barra em um sistema tridimensional local para um global, ou seja, ela transforma coordenadas locais em globais, definida como:

Figura 4 – Matriz de rotação resumida

$$R = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

Figura 5 – Matriz de rotação expandida

$$R = \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & R & R \end{bmatrix}$$

Fonte: Autor

O  $R_{3 \times 3}$  é formado por uma matriz  $3 \times 3$  com as coordenadas do eixo X, Y e Z da seguinte maneira:

$$R_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} C_x X & C_x Y & C_x Z \\ C_y X & C_y Y & C_y Z \\ C_z X & C_z Y & C_z Z \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação é composta por nove elementos, em que cada membro da matriz é obtido através dos cossenos diretores do eixo de coordenadas locais em relação ao eixo de coordenadas globais. A primeira linha da matriz representa os cossenos diretores do eixo x local, e pode ser analisado usando as coordenadas globais das duas extremidades em que o membro é fixado, como pode ser observado nas equações:

$$\begin{aligned} C_x X &= \cos \theta_x X = (Xf - Xi) / L \\ C_x Y &= \cos \theta_x Y = (Yf - Yi) / L \\ C_x Z &= \cos \theta_x Z = (Zf - Zi) / L \end{aligned}$$

Onde, L é o comprimento da barra é pode ser descrito da seguinte maneira:

$$L = \sqrt{(Xf - Xi)^2 + (Yf - Yi)^2 + (Zf - Zi)^2} \quad \text{Equação (4)}$$

## 2.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A tecnologia tem contribuído para melhores resoluções e com mais agilidade em diversos setores, inclusive na Engenharia Civil com novas plataformas, seja de cálculos, desenhos, elaborações de planilhas para orçamentos, planejamento de obras, reuniões entre outras, e a medida que ocorre o avanço tecnológico estes softwares estão cada vez mais sofisticados, tanto no mercado de trabalho, como no ensino nas universidades.

### 3. METODOLOGIA

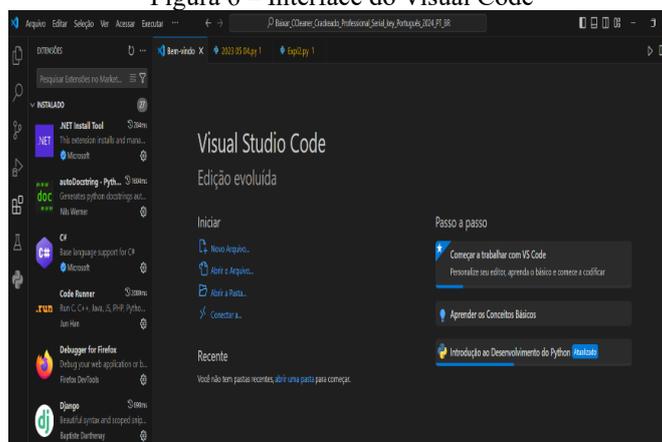
#### 3.1 LINGUAGEM PYTHON

Python é uma linguagem voltada a projetos, facilitando o controle de estabilidade quando estes começam a tomar grandes proporções, porém Python possui uma versatilidade de aplicações.

A fim de cumprir os objetivos propostos, o trabalho foi desenvolvido mediante emprego dos procedimentos metodológicos: em um primeiro momento foi realizada uma revisão bibliográfica sobre a análise matricial de estruturas de pórticos tridimensionais e efeitos da temperatura nessas estruturas. Em uma segunda etapa realizou-se uma pesquisa no intuito de se compreender as transformações recíprocas entre coordenadas locais e coordenadas globais. Posteriormente adotou-se uma linguagem de programação para implementação computacional de um programa capaz de determinar deformações e esforços solicitantes de pórtico tridimensional.

Desenvolveu-se um algoritmo contendo todas as etapas para a elaboração da matriz de rigidez da estrutura, vetor de forças de temperatura, condições de contorno e pós-processamento. Na etapa seguinte utilizou-se uma linguagem computacional open source (código livre) Python na plataforma Visual Code (Figura 6), sendo a linguagem mais eficaz para este projeto.

Figura 6 – Interface do Visual Code

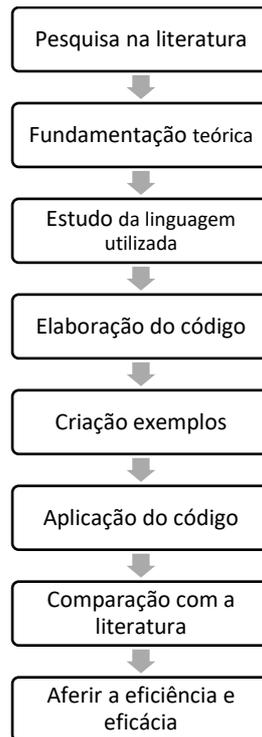


Fonte: Autor.

E como última etapa, gerar um código para inserir nas operações matemáticas os valores de variação de temperatura e executar o programa para gerar os valores e conferir sua veracidade.

O fluxograma abaixo demonstra todo processo realizado para a elaboração do código em Python.

### 3.1.1 Estrutura Metodológica adotada.



Fonte: Autor.

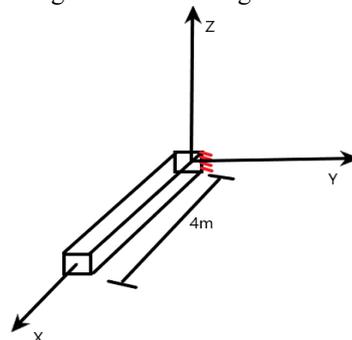
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para demonstrar eficácia do código foram resolvidos cinco exemplos, com características diferentes focados no efeito que a temperatura causa na barra de aço.

### 4.1 EXEMPLO 1

Uma barra de aço está engastada em uma ponta e livre na outra. Essa barra está submetida a uma temperatura de 20 °C. Qual o deslocamento sofrido pela barra pelo efeito da temperatura?

Figura 7 – Barra engastada na origem.

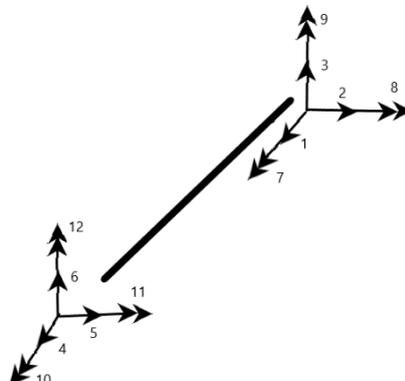


Fonte: Autor

Onde podemos observar que: Comprimento (L): 4m    Módulo de Young (E):  $205 \times 10^6$     Área (A):  $0,01 \text{m}^2$     Coeficiente Térmico ( $\alpha$ ):  $12 \times 10^{-3}$

Para começar, deve-se lembrar uma barra possui graus de liberdade que serão influenciadas pelas ações na mesma. São no total 12 graus de liberdade, sendo 6 iniciais e 6 finais como demonstrado na figura abaixo:

Figura 8 – Representação dos Graus de liberdade da barra



Fonte: Autor

Tendo como base os 12 graus de liberdade, tem-se a matriz de rigidez, uma matriz constituída de 12 linhas e 12 colunas.

Figura 9 – Matriz de rigidez tridimensional

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Fonte: Kassimali, 2012.

Primeiro passo é descobrir a força causada para gerar a deformação na barra, no caso é a variação de temperatura, que causa a expansão da barra, que pode ser calculada da seguinte forma:



$$\delta = \delta_{\Delta T}$$

$$\frac{F \times L}{E \times A} = \alpha \times \Delta T \times L$$

$$F = \alpha \times \Delta T \times E \times A$$

$$F = (12 \times 10^{-3}) \times 20 \times (205 \times 10^6) \times 0,1$$

$$F = 492 \text{ kN}$$

Com a força calculada, desenvolve-se a matriz para a solução do deslocamento utilizando a equação abaixo:

$$K \times \{d\} = \{F\} \text{ Equação (5)}$$

Onde:

F = Força

K = Matriz de Rigidez

d = Deslocamento

Na matriz de rigidez, deve-se atentar que 6 graus de liberdade estão engastados; por isso, devem ser removidos da matriz, tornando-a em uma matriz de 6x6, então tem-se:

Matriz de rigidez após a exclusão das linhas e colunas nos graus engastados

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ d5 \\ d6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{bmatrix}$$

Após montar a equação, substituirá os valores na força e no deslocamento:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 492 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deve-se realizar a multiplicação da matriz de rigidez com a matriz de deslocamento, obtém-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cdot d1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 492 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, iguala-se a força com o deslocamento:

$$492 = \frac{EA}{L} \times d1$$

$$d1 = \frac{492 \times 4}{0,001 \times 205 \times 10^6}$$

$$d1 = 0,096\text{m}$$

Como observado, a barra deslocou 0,096m no sentido do eixo X. Com esse valor, basta utilizar o programa para comparar os valores, o resultado do programa coincidiu com os obtidos anteriormente, como se observa na imagem abaixo.

Figura 10 – Resultado do exemplo 1 utilizando o código

```

Vetor de deslocamentos (u):
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.096 -0.  0.  0.
 -0.  0. ]

Vetor de deslocamentos por elemento (Ulocais):
[[ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]          Inicial
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [ 0. ]

 [ 0.096]
 [-0. ]          Final
 [ 0. ]
 [ 0. ]
 [-0. ]
 [ 0. ]

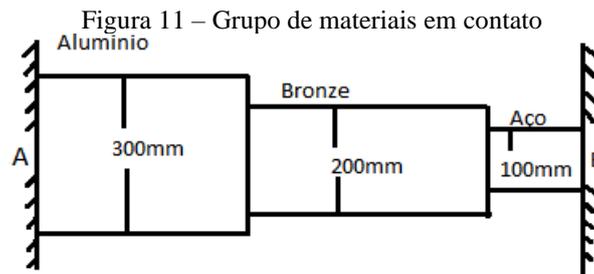
```

Fonte: Autor

Como se pode observar na imagem acima, os resultados coincidiram, o valor de 0 no vetor inicial demonstra que essa parte está engastada, por isso só possui valor no X final, onde a estrutura está livre é positivo, pois o sinal está de acordo com a orientação do eixo.

#### 4.2 EXEMPLO 2

Um grupo de materiais composto de alumínio, bronze e aço, estão ajustados entre os apoios fixos com a temperatura de 40°C. Determine o comprimento expandido gerado nos engastes



Fonte: Autor

Dados:

Temperatura (T)=40 °C;  $\alpha_1 = 23 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_1 = 73.1$  GPa

Comprimento alumínio ( $L_1$ )= 1.2m;  $d_1=300$ mm;  $\alpha_1 = 23 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_1 = 73.1$  GPa

Comprimento Bronze ( $L_2$ )= 1.8m;  $d_2=200$ mm;  $\alpha_2 = 17 \cdot (10^{-6})$  1/°C;  $E_2 = 103$  GPa

Comprimento aço ( $L_3$ )= 0.9m;  $d_3=100$ mm  $\alpha_3 = 1 \cdot (10^{-4})$  1/°C;  $E_3 = 193$  GPa

$$A = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot d^2 \quad \text{Equação (4)}$$

Deve-se começar transformando o esforço gerado pela deformação dos elementos em apenas duas forças, como mostra na figura abaixo:

Figura 12 – Esquema de forças do grupo de materiais.



Fonte: Autor

Assim, tem-se a seguinte equação de equilíbrio de forças:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_a - F_b = 0 \Rightarrow F_a = F_b \quad \text{Equação (6)}$$

Apesar do elemento estar engastado, a obtenção do comprimento expandido é necessária para identificar qual a força que os engastes teriam que exercer para resistir a essa expansão:

$$\delta_T = \alpha_1 \cdot (\Delta T) \cdot L_1 + \alpha_2 \cdot (\Delta T) \cdot L_2 + \alpha_3 \cdot (\Delta T) \cdot L_3$$

$$\delta_T = 23 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 1,2 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 1,8 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot (20) \cdot 0,9$$

$$\delta_T = 1,47 \text{mm}$$

O resultado em módulo serve tanto para o engaste inicial quanto para o final, pois estão sobre a mesma temperatura e os materiais estão juntos. Assim, utilizando o programa para resolver, obtém-se o seguinte resultado.



```
Reacoes :  
[-1.45702488  
  0.  
  0.  
  0.  
  0.      Início  
  0.  
  
 1.45702488  
  0.  
  0.  
  0.      Fim  
  0.  
  0.      ]
```

O resultado do programa foi um pouco diferente, podendo estar relacionado com a aproximação dos valores nas contas. O primeiro resultado sendo no primeiro nó está negativo por estar ao contrário da convenção, onde o positivo seria para a direita, ou seja, ele estaria em direção oposta a FA, enquanto o segundo nó estaria para sentido à direita e oposto a FB

Tabela 1 - Resultados do Exemplo II.

Comprimento	Resultados de Literatura	Resultados do Programa	E(%)
X	1.4700	1.4570	1.38

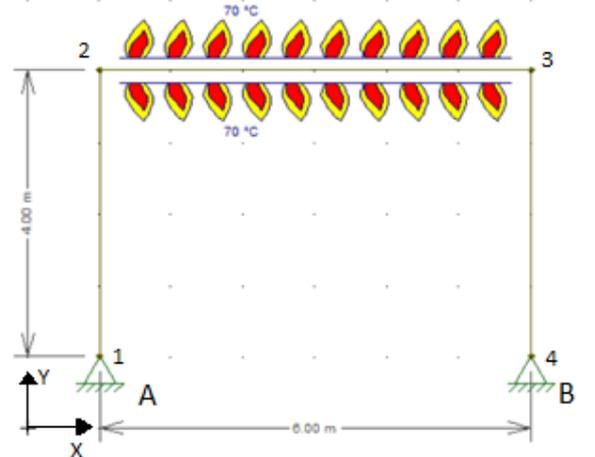
Fonte: Autor.

A tabela acima, apesar de ter uma margem de erro pequena provinda de arredondamentos, comprova a eficiência e eficácia do programa, atingindo o objetivo principal desse trabalho.

#### 4.3 EXEMPLO 3

Como terceiro exemplo, calculou o deslocamento horizontal do ponto B devido à variação de temperatura. Sua estrutura possui um material que tem o coeficiente térmico de  $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  e suas barras possuem secção retangular de  $0.5\text{m}^2$ .

Figura 13 – Pórtico bidimensional aquecido



Fonte: Autor.

Para calcular a expansão devido à variação de temperatura, utilizamos a seguinte fórmula:

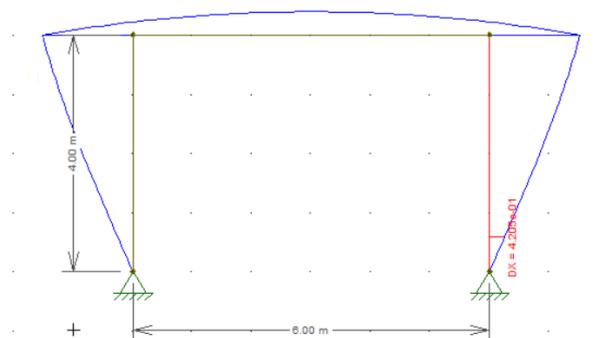
$$\delta = \alpha \times tg \times AN$$

$$\delta = 10^{-5} \times (70) \times (6 \times 1)$$

$$\delta = 0.0042\text{m}$$

$\delta = 0,0042\text{m}$ , ou seja, como o valor foi positivo, pela orientação determinada o ponto B deslocou 4,2 cm para direita.

Figura 14 – Deslocamentos devido à Variação Temperatura (Ftool).



Fonte: Autor

Com a execução do código, obteve o deslocamento gerado pelo aquecimento da viga da estrutura, ou elemento 2, gerando os seguintes valores:

Vetor de deslocamentos (u):

```

[-4.20000000e-03 X1
 0.00000000e+00 Y1
 0.00000000e+00 Z1
-8.90000000e-03 X2
 1.29073982e-17 Y2
 0.00000000e+00 Z2
 8.90000000e-03 X3
 1.29073982e-17 Y3
 0.00000000e+00 Z3
 4.20000000e-03 X4
-0.00000000e+00 Y4
-0.00000000e+00 Z4

```

Como observado nos resultados, os valores negativos se referem a orientação, contrário no caso adotado. O valor obtido em X no ponto B que é o objetivo do exemplo coincidiu com o obtido na literatura retirada no livro Análise estrutural do Kassimali, gerando a tabela abaixo.

Tabela 2 - Resultados do Exemplo III.

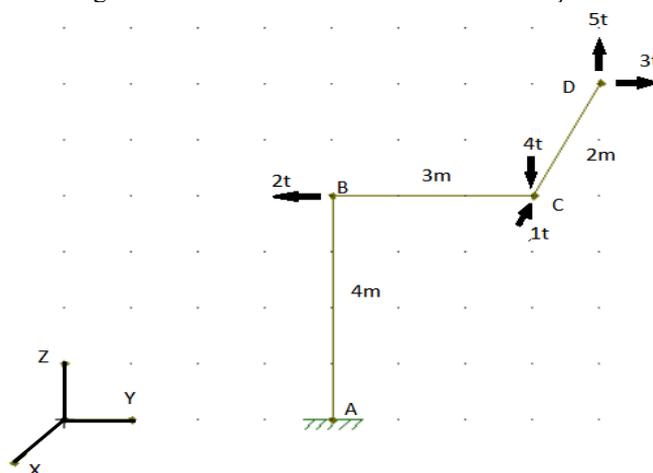
Graus de liberdade	Resultados de Literatura	Resultados do Programa	E(%)
$\delta$ (m)	0,0042m	0,0042m	0

Fonte: Autor.

#### 4.4 EXEMPLO 4

Calcular as reações de apoio no engaste A da estrutura tridimensional, cujo ângulo entre as barras é de  $90^\circ$ . Apesar do exemplo não conter a variação de temperatura, o mesmo foi utilizado para demonstrar que o programa consegue calcular momentos e forças na estrutura.

Figura 15 – Pórtico tridimensional com esforços.



Fonte: Autor

No gráfico acima demonstra um pórtico tridimensional com esforços, onde temos as seguintes forças atuando:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \Rightarrow X_A = 1t \\ \sum Y &= 0 \Rightarrow Y_A = -1t \\ \sum Z &= 0 \Rightarrow Z_A = -1t \end{aligned}$$

Momento em X:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_{x_a} + 2 \times 4 - 4 \times 3 + 5 \times 3 - 3 \times 4 = 0 \Rightarrow M_{x_a} = 1m$$

Momento em Y:

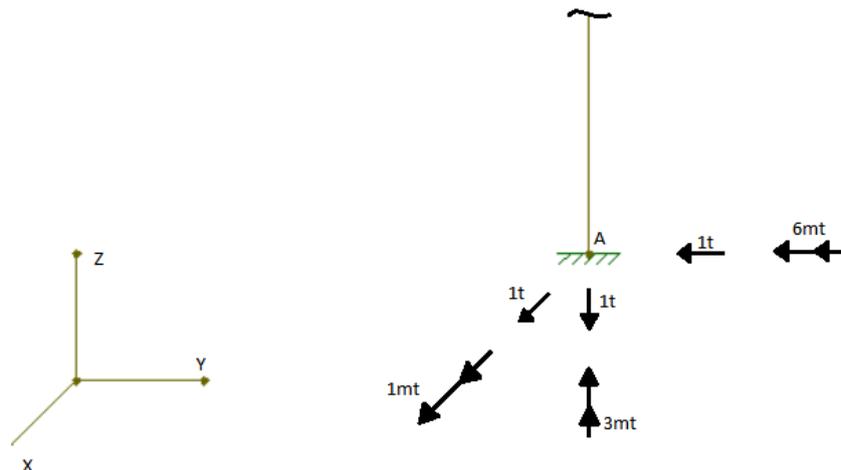
$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{y_a} - 1 \times 4 + 5 \times 2 = 0 \Rightarrow M_{y_a} = -6m$$

Momento em Z:

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{z_a} + 1 \times 3 - 3 \times 2 = 0 \Rightarrow M_{z_a} = 3m$$

Com isso tem-se a seguinte configuração:

Figura 16 – Forças no ponto A



Fonte: Autor.

O gráfico representa os resultados das forças atuando no ponto A.

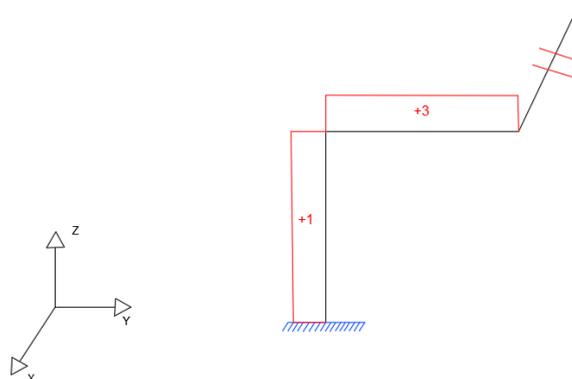
Tabela 3 - Resultados das forças no ponto A.

Graus de liberdade	Resultados de Literatura	Resultados do Programa	E(%)
$M_{XA}$ (mt)	1.00	-1.000	0
$\sum M_{YA}$ (mt)	-6.00	6.000	0
$M_{ZA}$ (mt)	3.00	-3.000	0

Fonte: Autor.

Apesar dos resultados obtidos terem sinais opostos aos obtidos na literatura, em módulo possuem o mesmo valor, isso ocorre, pois a orientação de sinais da literatura é diferente do adotado pelo programa, ou seja, se na literatura o momento em sentido horário é positivo no programa é negativo, com os resultados para fins educativos, tem-se os diagramas de força normal, cortante, momento fletor, o mais importante para o exemplo e momento torsor, pois é o objetivo do exemplo, segundo as figuras abaixo (Figura 17, 18,19 e 20):

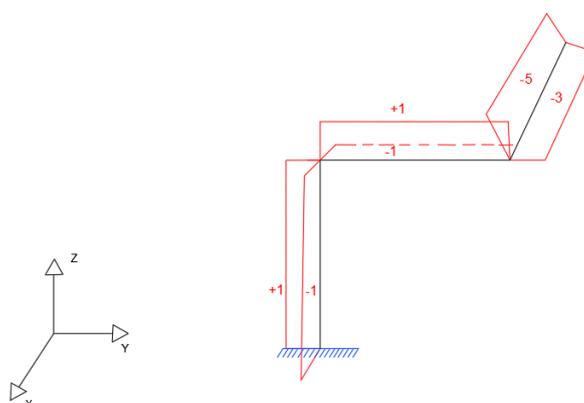
Figura 17 – Diagrama Normal



Fonte: Autor

A figura acima representa a força normal.

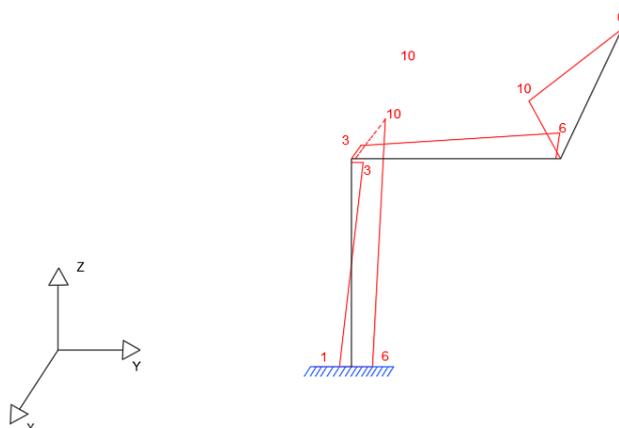
Figura 18 – Diagrama Cortante



Fonte: Autor

Observamos o diagrama da força cortante.

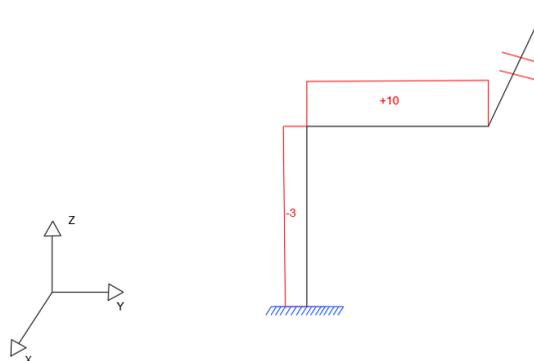
Figura 19 – Diagrama de Momento Fletor



Fonte: Autor

A figura acima representa o diagrama do Momento Fletor.

Figura 20 – Diagrama de Momento Torsor



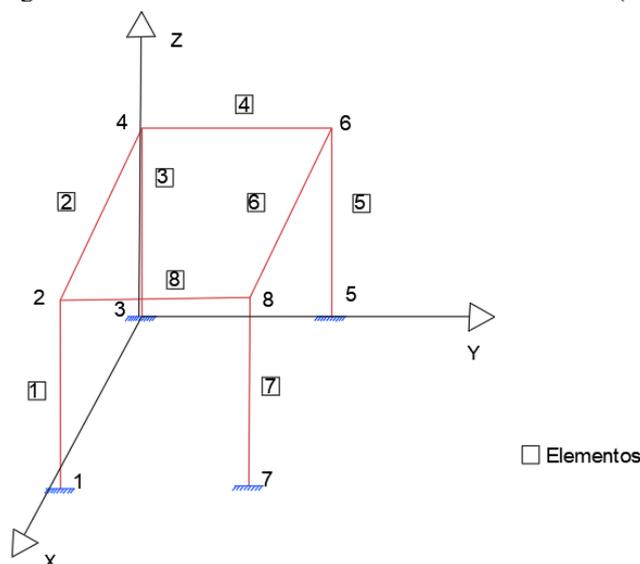
Fonte: Autor

A Figura acima representa a força de Momento Torsor da estrutura.

#### 4.5 EXEMPLO 5

A parte superior de um pórtico em formato de “mesa”, foi aquecido à 20 °C, as barras possuem a mesma medida e material metálico. Determinar o deslocamento gerado por esse aumento de temperatura.

Figura 21 – Pórtico tridimensional em formato de “mesa”(2)



Fonte: Autor

A figura acima mostra o deslocamento, devido ao aumento de temperatura.

A tabela abaixo contém informações necessárias para a execução do exemplo no programa.

Tabela 4 – Informações do Pórtico

Propriedade	Valor	Unidade
Comprimento (L)	4	m
Young (E)	100	MPa
Poisson ( $\nu$ )	0,25	-
$I_y$	5000000	$\text{mm}^4$
$I_z$	5000000	$\text{mm}^4$
Temperatura	20	$^{\circ}\text{C}$
Área(A)	5000	$\text{mm}^2$

Fonte: Autor

Esse exemplo será solucionado utilizando somente o programa por dois motivos: o primeiro devido à complexidade do mesmo, fazê-lo de outra forma seria extremamente complicado e estaria desviando da proposta do trabalho; segundo, com base nos exemplos anteriores, o programa está cumprindo seu objetivo.

Em primeiro lugar, deve-se inserir os dados correspondentes ao exemplo e em seguida executar o mesmo, segue abaixo a imagem.



Figura 22 – Entrada de dados do código

```

8 # Entrada de dados
9 elemento = 'Portico3D'
10 Nele = 8
11 Nnos = 8
12 Nvinc = 24
13 Nf = 0
14 Nm = 0
15 Nenc = 4
16 Ntg = 0
17
18 Vele = numpy.zeros((Nele)) # cria um vetor/lista nulo de tamanho Nele
19 Vele = [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ] # ordem crescente sempre!
20
21 noi = numpy.zeros((Nele))
22 nof = numpy.zeros((Nele))
23 noi = [ 1, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 2 ]
24 nof = [ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7 ]
25
26 Young = numpy.zeros((Nele))
27 poison = numpy.zeros((Nele))
28 Young = [ 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0, 100.0 ]
29 poison = [ 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 ]
30 alfa = [ 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001 ]
31
32 A = numpy.zeros((Nele))
33 Iy = numpy.zeros((Nele))
34 Iz = numpy.zeros((Nele))
35 A = [ 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0, 50.0 ]
36 Iy = [ 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0 ]
37 Iz = [ 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0, 500.0 ] # 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0, 800.0
38 # Entrada do ângulo em graus
39 Irot_deg = [ 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 ]
40

```

Fonte: Autor

O primeiro resultado que se tem são as reações de apoio nos nós 1, 3, 5 e 7, pois são os que sustentam a estrutura como demonstrado na figura do exemplo. O que se percebe é que como a temperatura não está sendo aplicada nos elementos pertencentes nesses nós que estão engastados, os valores são muito baixos ou praticamente zero

Tabela 5 – Reações de Apoio do exemplo acima

Apoio	Valor
X 1	-3.74999297e-05
Y 1	3.74999297e-05
Z 1	-8.94412719e-16
θX 1	-9.99998125e-02
θY 1	-9.99998125e-02
θZ 1	-3.52881146e-13
x 3	3.74999297e-05
Y 3	3.74999297e-05
Z 3	7.82438643e-16
θX 3	-9.99998125e-02
θY 3	9.99998125e-02
θZ 3	-3.52875069e-13
X 5	3.74999297e-05
Y 5	-3.74999297e-05
Z 5	1.81273174e-15
θX 5	9.99998125e-02
θY 5	9.99998125e-02
θZ 5	-3.52883895e-13
X 7	-3.74999297e-05
Y 7	-3.74999297e-05
Z 7	-1.70072178e-15
θX 7	9.99998125e-02
θY 7	-9.99998125e-02
θZ 7	-3.52881830e-13

Fonte: Autor



O segundo resultado que se obtém, são os esforços solicitantes. Note que na tabela 6 estão descritos os resultados dos graus de liberdade dos nós iniciais e finais referentes aos oito elementos. , pode-se notar que nos nós em que os elementos não possuem o aquecimento, ou seja, os que estão engastados citados na tabela acima, o valor é basicamente zero como observado na tabela abaixo

Tabela 6 – Esforços Solicitantes do exemplo

ELEMENTOS									
	E	1	2	3	4	5	6	7	8
Graus de liberdade	$X_i$	-8.94412719e-16	-1.99999625e+01	7.82438643e-16	-1.99999625e+01	1.81273174e-15	-1.99999625e+01	-1.70072178e-15	-1.99999625e+01
	$Y_i$	3.74999297e-05	-7.99524165e-16	-3.74999297e-05	-9.75962316e-16	3.74999297e-05	7.99509738e-16	3.74999297e-05	-9.75966187e-16
	$Z_i$	3.74999297e-05	7.02928926e-16	-3.74999297e-05	7.94923480e-17	-3.74999297e-05	1.89219029e-15	3.74999297e-05	-1.91476880e-16
	$\theta X_i$	-3.52881146e-13	7.22581717e-14	-3.52875069e-13	3.17142146e-13	-3.52883895e-13	7.22442939e-14	-3.52881830e-13	3.17138676e-13
	$\theta Y_i$	-9.99998125e-02	4.99999062e-02	4.99999063e-02	-4.99999063e-02	4.99999063e-02	-4.99999063e-02	-4.99999062e-02	-4.99999062e-02
	$\theta Z_i$	9.99998125e-02	-1.59905868e-12	-4.99999063e-02	-1.95193984e-12	4.99999062e-02	1.59902007e-12	4.99999063e-02	-1.95194501e-12
	$X_f$	8.94412719e-16	1.99999625e+01	-7.82438643e-16	1.99999625e+01	-1.81273174e-15	1.99999625e+01	1.70072178e-15	1.99999625e+01
	$Y_f$	-3.74999297e-05	7.99524165e-16	3.74999297e-05	9.75962316e-16	-3.74999297e-05	-7.99509738e-16	-3.74999297e-05	9.75966187e-16
	$Z_f$	-3.74999297e-05	-7.02928926e-16	3.74999297e-05	-7.94923480e-17	3.74999297e-05	-1.89219029e-15	-3.74999297e-05	1.91476880e-16
	$\theta X_f$	3.52881146e-13	-7.22581717e-14	3.52875069e-13	-3.17142146e-13	3.52883895e-13	-7.22442939e-14	3.52881830e-13	-3.17138676e-13
	$\theta Y_f$	-4.99999062e-02	-4.99999063e-02	9.99998125e-02	4.99999063e-02	9.99998125e-02	4.99999062e-02	-9.99998125e-02	4.99999063e-02
	$\theta Z_f$	4.99999062e-02	-1.59906314e-12	-9.99998125e-02	-1.95191332e-12	9.99998125e-02	1.59901368e-12	9.99998125e-02	-1.95192365e-12

Fonte: Autor

O terceiro resultado e o mais importante que é o deslocamento causado pelo acréscimo de temperatura, vale ressaltar, que os que possuem zero, são onde os elementos estão restringidos pelos engaste. Percebe-se que alguns nós possuem o mesmo valor, porém com sinais invertidos, como exemplo o nó 2 e o nó 4, o que indica que expandem para sentidos opostos, lembrando que o fato que os sinais representam a direção em sentido a favor ou contrário à orientação adotada no exemplo. Os demais valores que são muito baixos serão desconsiderados, devido às dimensões do objeto como demonstrado na tabela abaixo.

Tabela 7 – Deslocamentos do exemplo

Nós	Valor (cm)
1 uX	0
1 uY	0
1 uZ	0
1 $\theta_x$	0
1 $\theta_y$	0
1 $\theta_z$	0
2 uX	7.99998500e+00
2 uY	-7.99998500e+00
2 uZ	7.15530175e-16
2 $\theta_x$	1.99999625e-03
2 $\theta_y$	1.99999625e-03
2 $\theta_z$	3.52881146e-14
3 uX	0
3 uY	0
3 uZ	0
3 $\theta_x$	0
3 $\theta_y$	0
3 $\theta_z$	0



4 uX	-7.99998500e+00
4 uY	-7.99998500e+00
4 uZ	-6.25950914e-16
4 θx	1.99999625e-03
4 θy	-1.99999625e-03
4 θz	3.52875069e-14
5 uX	0
5 uY	0
5 uZ	0
5 θx	0
5 θy	0
5 θz	0
6 uX	-7.99998500e+00
6 uY	7.99998500e+00
6 uZ	-1.45018539e-15
6 θx	-1.99999625e-03
6 θy	-1.99999625e-03
6 θz	3.52883895e-14
7 uX	0
7 uY	0
7 uZ	0
7 θx	0
7 θy	0
7 θz	0
8 uX	7.99998500e+00
8 uY	7.99998500e+00
8 uZ	1.36057742e-15
8 θx	-1.99999625e-03
8 θy	1.99999625e-03
8 θz	3.52881830e-14

Fonte: Autor

Em resumo os elementos 2, 4, 6 e 8 expandem em X e Y aproximadamente 8 cm conforme a orientação dos sinais. Para comprovar esse valor de maneira simples basta utilizar a fórmula da dilatação térmica, da seguinte maneira:

$$\delta\Delta T = \alpha \times \Delta T \times L$$

$$\delta\Delta T = 0.001 \times 20 \times 4$$

$$\delta\Delta T = 0.08 \text{ m ou } 8 \text{ cm}$$

Esse resultado serve em módulo para os nós 2, 4, 6 e 8, vistos que possuem as mesmas qualidades diferenciando somente na orientação explicada na tabela 7. Assim tem-se a seguinte tabela:

Tabela 8 - Resultados exemplo 5

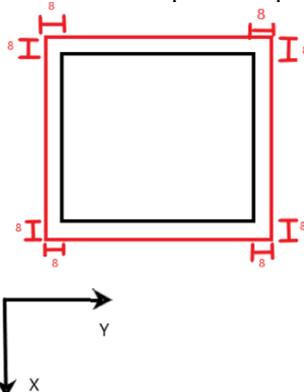
Deformação Térmica	Literatura	Programa	E(%)
$\delta_{\Delta T}$	8.000 cm	7.999cm	0.013%

Fonte: Autor.

O resultado do programa apresentou uma variação de 0.013% em relação ao executado de forma manual, o que se deve ao menor número de casas decimais utilizado nos cálculos realizados

pelo valor de referência. Tem-se na figura abaixo a representação do efeito gerado pela temperatura na parte superior da estrutura.

Figura 23 – Visão superior do pórtico



Fonte: Autor

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados apresentados, pode-se concluir-se que o programa desenvolvido é eficaz para a análise de pórticos espaciais considerando-se a variação uniforme de temperatura determinada estrutura, com uma margem de erro insignificante

A utilização de software para resolução de cálculos em qualquer área de estudo é essencial para reduzir o tempo gasto na sua execução e confiabilidade, nesse sentido a linguagem Python, demonstrou eficiência na análise de pórticos tridimensionais com influência de temperatura uniforme pelo método da rigidez, podendo o pórtico ser uniforme ou não conforme os resultados obtidos e embasados na literatura.

A linguagem Python, proporciona maior conhecimento e aplicabilidade no uso de linguagens computacionais, podendo ser uma ferramenta educacional no processo de ensino e aprendizagem para acadêmicos do Curso de Engenharia Civil, além de possibilitar a expansão para outros temas como estruturas não simétricas, variações de temperatura não uniforme.



## REFERÊNCIAS

AZKUNE, M. PUENTE, I. INSAUSTI, A. Effect of ambient temperature on the redistribution of loads during construction of multi-storey concrete structures. *Engineering Structures*. Science Direct. San Sebastian: Elsevier, 2007.

HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. 10ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2019.

KASSIMALI, ASLAM. Matrix Analysis of Structures, 2ed. Stamford, 2012

KASSIMALI, Aslam. Análise Estrutural. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 820 p. Tradução de: Noveritis do Brasil; Revisão técnica de: Luiz Antônio Vieira Carneiro.

KIMURA, Alio. Informática aplicada a estruturas de concreto armado. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018. 428 p.

MARTHA, Luiz Fernando. Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017. 569 p.

MCGUIRE, WILLIAM; GALLAGHER, RICHARD H.; E ZIEMIAN, RONALD D., Análise Estrutural de Matriz, 2ª Edição" (2000). *Livros da Faculdade*. 7. <https://digitalcommons.bucknell.edu/books/7>

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor. Vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blucher, 2014. 375 p. 4 v.

PRAVIA, ZACARIAS MARTIN CHAMBERLAIN, EDUARDO PASQUETTI, AND JULIANA ANA CHIARELLO. "Visualbarras: um software didático para o ensino de análise matricial de estruturas reticuladas planas." *XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Vol. 10. 2001.

PRZEMIENICKI, J.S. Theory of Structural Analysis. United States Of America: McGraw-Hill, 1968. 481 p.

SANTOS, M. R. G. Deterioração das estruturas de concreto armado – estudo de caso. 2012. 122f. Monografia (Curso de Especialização em Construção Civil) Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2012. Disponível em: <<http://pos.demc.ufmg.br/novocecc/trabalhos/pg2/88.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2016.