A busca pela prova da conjectura de Goldbach: Explorando suas conquistas

https://doi.org/10.56238/sevened2024.026-018

Carlos Daniel Chaves Paiva
Licenciando em Matemática
Instituto Federal do Ceará (IFCE)
Crateús, Ceará, Brasil
E-mail: carlos.daniel.chaves06@aluno.ifce.edu.br

Rildo Alves do Nascimento
Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituto Superior de Teologia Aplicada - INTA
Santa Maria da Boa Vista, Pernambuco, Brasil
E-mail: rildo.alves23@gmail.com

Isaías José de Lima
Mestre em Matemática (PROFMAT)
Universidade Federal do Ceará - UFC
Serra Talhada, Pernambuco, Brasil
E-mail: isaiaslima003@gmail.com

José Joel Alexandre
Especialista em Ensino de Matemática no Ensino Médio
Universidade Estadual do Ceará - UECE
Fortaleza, Ceará, Brasil
E-mail: aljandrex@gmail.com

Francisco Bergson Araujo Gomes
Mestre em Matemática (Profmat)
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Uruçuí, Piauí, Brasil
E-mail: bergson.gomes@ifpi.edu.br

Joelder Lincoln Gomes Tomé
Especialista em Matemática, suas tecnologias e o mundo do trabalho
Universidade Federal do Piauí - UFPI
João Pessoa, Paraíba, Brasil
E-mail: joelderlincoln@gmail.com

Cleilson Silva Alves
Licenciado em Matemática
Universidade Estadual do Ceará - UECE
Fortaleza, Ceará, Brasil
E-mail: cleilson.alves@prof.ce.gov.br

Ivan Eudes Gonçalves de Brito
Especialização em Formação de Professores para o Ensino Superior
Centro Universitário Juazeiro Do Norte (Unijuazeiro)
Assaré, Ceará, Brasil
E-mail: ivaneudesgbrito@hotmail.com

Geovânio Felipe Oliveira Martins
Especialista em Metodologias de Ensino para Educação Básica, IFCE
Universidade Estadual do Ceará - UECE
Russas, Ceará, Brasil
E-mail: felipeolivervianna@gmail.com

Carlos Henrique Lima de Moura
Mestrado em Matemática
Universidade Federal do Ceará - UFC
Caucaia, Ceará, Brasil
E-mail: enrico@ifce.edu.br

Adalgisa Maria de Oliveira
Mestra em Matemática (Profmat)
Instituto Federal do Piauí - IFPI
Pimenteiras, Piauí, Brasil
E-mail: adalgisa.oliveira@ifpi.edu.br

Santana da Rocha Oliveira
Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica
Universidade Estadual do Piauí- UESPI
Valença do Piauí, Piauí, Brasil
E-mail: santana_rocha@hotmail.com

Jhan Charles Borges Vitorino
Cursando Enfermagem
Universidade Anhanguera – UNIDERP, Campinas - SP
Paulínia, São Paulo, Brasil
E-mail: charlesjhan399@gmail.com

Jackeline Santos Feitosa
Cursando 7º Período em Ciências Contábeis (Bacharelado)
Universidade Pitágoras Unopar Anhanguera
Pereiro, Ceará, Brasil
E-mail: jackelinesantosfeitosa@gmail.com

RESUMO
Christian Goldbach foi um matemático russo que viveu no século XVIII. Muito embora visse a Matemática mais como um hobby, publicou vários trabalhos em Teoria dos Números. É em uma de suas correspondências

com Euler que surge a sua conjectura, a qual afirma que todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos (iguais ou não). Apesar de possuir um enunciado muito simples, a sua demonstração requer conhecimentos matemáticos avançados, tanto que até hoje continua sem uma prova definitiva. Obviamente, vários matemáticos dedicaram muitos anos de suas vidas ao estudo da conjectura de Goldbach. Nesse sentido, o objetivo desta pesquisa é elencar os avanços alcançados por tais matemáticos ao longo do tempo. Além disso, buscaremos entender melhor o contexto histórico em que se dá o surgimento da conjectura. Ao final, tentaremos destacar os resultados mais significativos e que em um primeiro instante podem ser a base para pesquisas posteriores.

Palavras-chave: Conjectura de Goldbach, Teoria dos Números, Números primos, Hipótese de Riemann.

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números, ramo fundamental da Matemática, concentra-se no estudo dos números inteiros e de suas propriedades. Seu legado remonta à Grécia Antiga, por volta de 500 a.C., quando os pensadores gregos já dedicavam atenção a esse campo de conhecimento. No decorrer dos séculos, a Teoria dos Números não apenas se manteve relevante, mas também se consolidou como um campo de pesquisa dinâmico e desafiador, que continua a inspirar e cativar as atuais gerações de matemáticos.

Uma característica distintiva desta área é a existência de problemas que, apesar de sua formulação inicialmente simples, demandam provas de complexidade significativa. Dentre tais problemas, podemos citar o famoso último teorema de Fermat, proposto pelo matemático francês Pierre de Fermat (1607-1665) no século XVII, o qual afirma que não existe soluções inteiras para a equação $x^n + y^n = z^n$, em que $n > 2$ e $x, y, z \neq 0$. Foi provado somente no final do século XX, depois de mais de 350 anos de tentativas. Outros problemas, no entanto, continuam a desafiar a comunidade matemática, como é o caso da conjectura de Collatz, proposta em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910-1990): seja $n > 0$ um número natural. Se n for par, divida-o por 2, obtendo $n/2$. Se n for ímpar, multiplique n por 3 e some 1, obtendo $3n + 1$. Repita esse processo para o valor obtido, e assim sucessivamente. A conjectura nos diz que o valor final obtido será sempre igual a 1.

Um conceito extremamente relevante nesta área é o de número primo: um inteiro positivo $p \geq 2$ é chamado primo se seus únicos divisores positivos são 1 e p. Alguns dos problemas matemáticos mais intrigantes estão, direta ou indiretamente, ligados a esses números. Um deles será o objeto de estudo desta pesquisa, que é a conjectura de Goldbach, a qual surgiu em 1742 e que hoje, após mais de 280 anos, continua sem uma demonstração definitiva. Segundo esta conjectura, todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

Nesse sentido, o objetivo desta pesquisa é elencar os resultados obtidos até hoje na tentativa de provar a conjectura. Ao final, destacaremos aqueles que, pelo menos a princípio, parecem ser mais interessantes para futuras pesquisas. Além disso, buscaremos compreender o contexto histórico em que se dá o surgimento da conjectura. Para que os nossos objetivos fossem alcançados, nos debruçamos sobre os trabalhos originais dos matemáticos que se dedicaram ao estudo da conjectura, bem como de outras obras (livros, monografias, dissertações e teses) que versassem sobre o assunto.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A CONJECTURA DE GOLDBACH

2.1.1 Christian Goldbach (1690-1764)

Christian Goldbach nasceu em 18 de Março de 1690, em Königsberg, Prússia, atualmente Kaliningrado, Rússia, e faleceu em 20 de Novembro de 1764, em Moscou. Filho de um pastor da Igreja Protestante, Goldbach estudou Matemática, mas principalmente Direito e Medicina.

Em 1710, aos vinte anos, iniciou uma das várias viagens pela Europa, estabelecendo contato com muitos dos principais cientistas da época. Durante essa viagem, em 1711, conheceu Leibniz (1646-1716), na cidade de Leipzig. Durante os dois anos seguintes, os dois trocaram correspondência em latim. Em 1712, em Londres, Goldbach encontrou-se com o matemático francês De Moivre (1667-1754) e com o suiço Nicolaus (I) Bernoulli (1687-1759) que, tal como Goldbach, também viajava pela Europa.

Goldbach continuou a sua longa viagem e esteve em Veneza em 1721. Aqui ele conheceu Nicolaus (II) Bernoulli (1695-1726), que também estava em viagem pela Europa. Foi por sugestão de Nicolaus que Goldbach iniciou em 1723 uma correspondência, que durou sete anos, com Daniel Bernoulli (1700-1782), o irmão mais novo de Nicolaus.

Em 1724 Goldbach regressou à sua cidade natal, e conheceu dois matemáticos que influenciaram a sua vida: o alemão Georg Bernhard Bilfinger (1693-1750) e o suíço Jakob Hermann (1678-1733). Georg Bilfinger e Jakob Hermann iam em direção a São Petersburgo para ajudarem a criar a Academia Imperial de Ciências (mais tarde chamada de Academia de Ciências de São Petersburgo), que seria organizada (por sugestão de Leibniz) com a mesma linha orientadora da Academia de Ciências de Berlim.

Em julho de 1725 Goldbach escreveu a Laurentius Blumentrost (1692-1755), presidente desta nova Academia, pedindo um cargo. Após uma rejeição inicial, Goldbach foi convidado para os cargos de professor de Matemática e historiador em São Petersburgo. Este convite se deveu ao fato de Goldbach já ser nesta altura um matemático conhecido, pois desde 1717 que publicava trabalhos. Vale destacar que em 1717, depois da leitura de um artigo de Leibniz sobre o cálculo da área de um círculo, acabou por se debruçar novamente na teoria das séries infinitas e em 1720 publicou *Specimen methodi ad summas serierum na Acta eruditorum*. Goldbach foi secretário de gravação da cerimônia de abertura da Academia, realizada em 27 de dezembro de 1725, e continuou a exercer esta função até janeiro de 1728.

Em 17 de maio de 1727, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) chegou a São Petersburgo para assumir um cargo na Academia de Ciências. A partir disso, ele começou uma correspondência com Goldbach que duraria cerca de 35 anos (entre 1729 e 1764).

Dessa correspondência, 196 cartas sobreviveram. Muitas destas cartas tratavam de variados problemas de Teoria dos Números, alguns deles apresentados anteriormente por Pierre de Fermat. A extensa correspondência entre Goldbach e Euler é uma fonte de informação sobre a história da Matemática no século XVIII, pois fornece um registo fundamental do legado de Euler na Teoria dos Números, mais até do que as próprias publicações de Euler. Goldbach, mesmo olhando para a Matemática como uma atividade lúdica, desenvolveu um trabalho importante na Teoria dos Números.

2.1.2 Contexto histórico da conjectura

Em 7 de junho de 1742, em uma dessas cartas, Goldbach sugere o seguinte, exemplificando posteriormente:

> Eu não considero inútil notar também aquelas proposições que são muito prováveis, embora não haja demonstração real, porque mesmo que elas sejam posteriormente consideradas falsas, ainda podem fornecer uma oportunidade para a descoberta de uma nova verdade. [...] Assim, quero propor uma conjectura: Todo inteiro que pode ser escrito como a soma de dois primos, também pode ser escrito como a soma de quantos primos se queira (incluindo o 1), até todos os termos serem unitários. (FUSS, 1843, p. 127, tradução nossa).

Na margem dessa mesma correspondência ele propôs ainda uma conjectura que ficaria conhecida como a conjectura "marginal" de Goldbach:

Todo inteiro maior que 2 pode ser escrito como a soma de três primos.

Naquela época, Goldbach, assim como outros matemáticos, consideravam o número 1 um primo — convenção esta que foi abandonada posteriormente, como bem sabemos. Dessa forma, para os números 3, 4 e 5, essa primeira versão da conjectura marginal seria inválida. Assim, a forma aceita da conjectura — ou seja, não considerando o 1 um número primo — é:

Todo inteiro maior que 5 pode ser escrito como a soma de três primos.

Ou, analogamente:

Todo inteiro maior ou igual a 6 pode ser escrito como a soma de três primos.

Ainda na sequência dessa carta, Goldbach comenta que, de sua conjectura marginal, pode obter a seguinte:

Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos.

Euler, em 30 de junho de 1742, concorda efetivamente que a conjectura marginal poderia ser decomposta em duas. A primeira, enunciada da seguinte forma:

Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

(Conjectura "forte", "par" ou "binária" de Goldbach).

Para números menores, não há a necessidade de recorrer a métodos/recursos mais complexos para encontrar dois números primos (iguais ou não).

No entanto, à medida que números maiores são considerados, a utilização de métodos matemáticos mais elaborados, bem como o uso de recursos tecnológicos, se tornam indispensáveis. Nesse sentido, verificar a validade da conjectura para o número 66.780.242 usando apenas "lápis e papel", por exemplo, é inviável, sendo imprescindível então, neste caso, o uso da tecnologia.

Não é difícil imaginar, entretanto, que se tomarmos números ainda maiores, até para a tecnologia a missão vai se tornando árdua. Isso se deve, principalmente, a dois fatores: a infinitude dos números e a imprevisibilidade dos números primos.

A segunda parte da conjectura marginal nos diz que:

Todo número ímpar maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos.

Esta, de maneira mais precisa, pode ser reescrita como:

Todo número ímpar maior que 7 pode ser escrito como a soma de três números primos ímpares. (Conjectura "fraca", "ímpar" ou "ternária" de Goldbach).

Esta conjectura (já provada) ficou reconhecida assim pelo fato de que, se a conjectura forte for demonstrada, ela automaticamente também é demonstrada, já que se torna um corolário da forte. De fato, tomando a conjectura forte de Goldbach como verdadeira e sendo $N > 7$ um número ímpar qualquer, então $N - 3$ é trivialmente um número par e pode ser expresso como $N - 3 = p_1 + p_2$ (de acordo com a conjectura forte), onde p_1 e p_2 são primos. Portanto, $N = p_1 + p_2 + 3$. Em outras palavras, a conjectura forte implica na fraca, mas esta não implica naquela.

A conjectura (forte) de Goldbach, que faz parte do problema 8 da lista proposta pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) durante a realização do Segundo Congresso Internacional de Matemática em 8 de agosto de 1900, em Paris, tem fascinado — e frustrado — muitos matemáticos e curiosos durante os últimos 280 anos. No último século, principalmente, como será listado a seguir, muitos trabalhos visando provar a conjectura foram desenvolvidos, sendo alguns com resultados relativamente interessantes. Mesmo que tais avanços ainda sejam insuficientes, essa procura tem, como destaca Sousa (2013, p. 39), "contribuído para o desenvolvimento da própria Teoria dos Números, na medida em que têm surgido outros resultados, menos importantes que a conjectura, mas que podem permitir, quem sabe, prová-la". O autor enfatiza ainda que a investigação da conjectura tem "permitido o desenvolvimento de métodos úteis à Teoria dos Números e a outras áreas da Matemática".

2.2 SOBRE A HIPÓTESE DE RIEMANN

Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão. Em 1851, na Universidade de Göttingen, obteve o seu doutorado, orientado por Gauss. Sua tese foi desenvolvida no campo da teoria das funções complexas.

Em 1859, após a morte de Dirichlet, foi nomeado professor titular em Göttingen. Riemann forneceu uma definição rigorosa de integrabilidade de uma função através da Integral de Riemann. Ele também generalizou todas as geometrias, incluindo a euclidiana, para a Geometria Riemanniana, que serviu de base para a Teoria da Relatividade de Albert Einstein.

O seu único trabalho em Teoria dos Números foi publicado em 1859, intitulado *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Sobre o número de números primos menores que um determinado valor). Nele, a partir de uma identidade descoberta anteriormente por Euler, chegou a uma função que ficou conhecida como Função Zeta de Riemann, que é uma função especial de variável complexa. Ao escrever esse trabalho, o objetivo de Riemann era, essencialmente, definir o caminho em direção à prova da conjectura de Gauss sobre a distribuição dos números primos, o que só aconteceu alguns anos depois. A famosa hipótese de Riemann afirma que todos os zeros não triviais Zeta estão localizados sobre a linha crítica.

A hipótese de Riemann, associada à conjectura de Goldbach e à conjectura dos primos gêmeos, compõem o oitavo problema na lista de 23 problemas proposta pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943) durante o Congresso Internacional de Matemática que aconteceu em Paris, em 1900. Também é um dos Problemas do The Millennium Prize Problems do Clay Mathematics Institute. O prêmio para quem apresentar uma prova é de 1 milhão de dólares.

Já foram encontrados, computacionalmente, mais de 12 trilhões de zeros não triviais. Além disso, em 1914, o matemático britânico G. H. Hardy (1877-1947) mostrou que existem infinitos zeros com parte real igual a 1/2. Apesar disso, a questão permanece em aberto, mais de 160 anos depois.

Muitos resultados na Matemática foram provados assumindo como verdadeira a hipótese de Riemann, inclusive alguns relacionados à conjectura de Goldbach, como veremos mais adiante.

3 METODOLOGIA

A etapa inicial da pesquisa que resultou neste trabalho começou com a escolha do tema. Uma vez definido, foram estabelecidos os objetivos e selecionada a metodologia, optando-se pela pesquisa bibliográfica.

Segundo Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica “[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído, principalmente, de livros e artigos científicos”. Complementando isso, Severino (2007, p. 122) nos diz que a pesquisa bibliográfica realiza-se pelo:

> [...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos. (SEVERINO, 2007, p.122).

Dessa maneira, os textos escolhidos pelo pesquisador desempenham um papel fundamental ao fornecerem a base e o suporte necessários para a elaboração do trabalho. Eles não apenas ampliam a compreensão do pesquisador sobre o tema, mas também esclarecem os limites e as possibilidades da pesquisa, permitindo uma análise mais aprofundada e abrangente.

Nesse sentido,

> Essa pesquisa tem a finalidade de conhecer as diferentes formas de contribuição científica já realizada sobre determinado assunto, visando entrar dados atuais e relevantes sobre o tema investigado. Utiliza-se exclusivamente de material já elaborado e disponível, em particular livro s e artigos científicos, e é a base para qualquer tipo de pesquisa [...] (METRING, 2010, p. 64).

Após o levantamento bibliográfico, foi realizada uma seleção dos textos/materiais mais relevantes ao tema da pesquisa. Com a leitura sistemática desse material concluída, procedeu-se à redação da presente pesquisa, integrando as leituras relacionadas à temática estudada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, detalharemos os resultados das investigações feitas ao longo do tempo na tentativa de provar a conjectura de Goldbach. As primeiras tentativas datam do século XIX, mas os resultados mais significativos foram alcançados somente a partir do século XX.

Entre a data de surgimento/publicação da conjectura e o primeiro resultado alcançado, viveram, evidentemente, grandes matemáticos (considerados por muitos, inclusive, alguns dos mais prolíficos da história). Dentre eles podemos citar: os alemães Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Ernst Kummer (1810-1893) e Richard Dedekind (1831-1916); o italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813); os franceses Joseph Fourier (1768-1830), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Henri Poincaré (1854-1912) e os noruegueses Niels Henrik Abel (1802-1829) e Sophus Lie (1842-1899). A história não nos conta exatamente se tais matemáticos sequer souberam algum dia da existência da conjectura, uma vez que, como nos traz Décaillot:

> [...] considerando que a conjectura de Goldbach não foi publicada até Waring (matemático inglês) a publicá-la em 1770 (sem atribuir a autoria, uma prova ou comentários) em sua obra *Meditationes Algebraicae*, é compreensível que seja difícil avaliar quanto trabalho empírico foi feito na conjectura de Goldbach nos cem anos ou mais após sua primeira aparição na carta de Euler. De fato, como mencionado acima, até 1894, Poincaré ainda estava perguntando onde a conjectura de Goldbach havia sido publicada. (DÉCAILLOT, 2008, apud FARRUGIA, 2018, p. 31, tradução nossa).

O que se tem conhecimento de fato é que Euler afirmou que tinha praticamente certeza de que a conjectura era válida, no entanto não seria, pelo menos naquele momento, capaz de prová-la.

4.1 SÉCULO XIX

O século XIX foi um período de grandes mudanças e transformações na história mundial. Foi nesse século também que começaram a surgir os primeiros estudos relacionados à conjectura de Goldbach.

Em 1855, o matemático francês Louis-Charles-Antoine Desboves (1792-1883) publicou um trabalho no qual ele verificou a conjectura de Goldbach até 10.000. Seu trabalho foi um avanço significativo na busca por uma prova dessa conjectura, já que é o primeiro estudo de que se tem conhecimento.

Posteriormente, em 1894, o grande matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) forneceu uma tabela com as decomposições de todos os números pares até 1.000 como a soma de dois números primos.

Ainda no fim do século, o também matemático alemão Carl Hermann Robert Haussner (1863-1948) mostra a validade da conjectura primeiro até 100.000 e, depois, até 1.000.000.

Embora os resultados alcançados no século XIX tenham sido matematicamente de pouca importância, foram relevantes porque inspiraram outros matemáticos a pesquisar sobre o assunto.

4.2 SÉCULO XX

No século XX também viveram grandes matemáticos, tais como os alemães David Hilbert e Emmy Noether (1882-1935); o austríaco Kurt Gödel (1906-1978); os britânicos Alan Turing (1912-1954) e Bertrand Russell (1872-1970); o húngaro John von Neumann (1903-1957); o francês André Weil (1906-1998); o chinês Shiing-Shen Chern (1911-2004); os americanos Paul Cohen (1934-2007), Serge Lang (1927-2005) e John Forbes Nash (1928-2015); o indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Grandes matemáticos brasileiros também surgiram e trabalharam ativamente nesse século, tais como Lélio Gama (1892-1983), Maurício Peixoto (1921-2012), Manfredo do Carmo (1928-2018), Jacob Palis (1946-), Marcelo Viana (1958-) e o renomado Elon Lages Lima (1929-2017).

Foi a partir desse século que importantes estudos começaram a ser feitos e divulgados, com o objetivo de provar a conjectura de Goldbach (ou, pelo menos, aumentar o arsenal de ferramentas para começar a "atacar" o problema, que até então era praticamente inexistente). É importante ressaltar que, como nos explica Wang (2002), as grandes conquistas da Teoria Analítica dos Números no século XIX, em particular, a teoria de Chebyshev (1821-1894), Dirichlet (1805-1859), Riemann, Hadamard (1865-1963), de la Vallée Poussin (1866-1962) e von Mangoldt (1854-1925) sobre a distribuição de números primos, foram essenciais para o avanço no estudo da conjectura.

As demonstrações desses resultados são, como o leitor já deve imaginar, demasiadamente complexas; a grande maioria com dezenas de páginas. Por conta disso, não explanaremos detalhadamente os elementos presentes em cada uma delas, até porque fazer isso fugiria do objetivo deste trabalho. Deixamos, no entanto, como sugestão de leitura, o livro The Goldbach Conjecture, de Yuan Wang, no qual estão detalhados tais resultados.

O primeiro grande resultado aparece entre 1919 e 1920, quando o matemático norueguês Viggo Brun (1885-1978), em seu trabalho intitulado *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*, demonstrou que *qualquer número par suficientemente grande é a soma de dois números, cada um tendo no máximo nove fatores primos.*

Para chegar a essa conclusão, o que Brun faz basicamente é modificar o Crivo de Eratóstenes, baseando-se nos trabalhos do jovem matemático francês Jean Merlin (1891- 1915), morto em combate durante a Primeira Guerra Mundial e cujo trabalho foi publicado postumamente pelo matemático também francês Jacques Hadamard. Através desse crivo são obtidas informações acerca de pares de números cuja soma é um número par.

Em 1923, Hardy e Littlewood (1885-1977) mostraram em seu trabalho *Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, assumindo a hipótese de Riemann, que *todo número ímpar suficientemente grande é a soma de três números primos e que quase todos os números pares são somas de dois primos*. Littlewood, na época, estimou que esse número "suficientemente grande" deveria ser maior ou igual a 10^{50}.

A demonstração de Hardy e Littlewood, embora de grande engenhosidade, possuía dois aspectos que a limitavam: um era o fato de depender da hipótese de Riemann; o outro é que ela não determinava o quão grande deveria ser o número em questão. Como veremos mais adiante, tais limitações foram reduzidas.

Apesar de tudo, Hardy e Littlewood foram os pioneiros na construção do conhecimento que se tem acerca da conjectura de Goldbach.

Três anos depois, o matemático alemão Bruno Lucke (1902-1944), orientado por Edmund Landau (1877-1938), determinou em sua tese de Doutorado que o número 10^{32} poderia já ser considerado "suficientemente grande" para a teoria de Hardy-Littlewood.

Baseado no resultado de Brun, o russo Lev Schnirelmann (1905-1938), provou, em 1930, que *todo número par maior ou igual a 2 pode ser escrito como a soma de não mais de 20 números primos*. Esse resultado seria aperfeiçoado no final do século.

Em 1932, o matemático britânico Theodor Estermann (1902-1991) melhora o resultado de Brun, ao provar que *todo número par suficientemente grande é a soma entre um número primo e um número que é o produto de no máximo 6 fatores primos*. Estermann provou isso, entretanto, utilizando a hipótese de Riemann.

Cinco anos depois, o russo Ivan Vinogradov (1891-1983), em seu trabalho *Representation of an odd integer as a sum of three primes* obteve um grande resultado: conseguiu remover a dependência na hipótese de Riemann, gerando então a prova incondicional dos resultados de Hardy e Littlewood — mas não conseguiu determinar o que significava "suficientemente grande". Posteriormente, os matemáticos russos Yuri Linnik (1915-1972) e Nikolai Georgievich Tchudakov (1908-1986); o americano Hugh Lowell Montgomery (1944-); o chinês Pan Cheng Biao (1938-); a britânica Mary Frances Huxley (1924-2014) e o indiano Kanakanahalli Ramachandra (1933-2011) apresentaram provas alternativas para esse teorema.

O resultado de Vinogradov é um avanço notável, pois removeu uma das principais limitações da demonstração de Hardy e Littlewood, que era a dependência da hipótese de Riemann. Feito isso, a maioria dos estudos seguintes objetivavam definir a partir de qual valor um número seria considerado "suficientemente grande".

Em 1938, Tchudakov provou, assim como Littlewood, que quase todos os números pares são somas de dois primos, mostrando que a distribuição dos números primos é muito regular, mesmo em grandes escalas.

O matemático húngaro Alfréd Rényi (1921-1970) provou, 16 anos depois, o resultado de Estermann desconsiderando a hipótese de Riemann.

Em 1956, no entanto, o matemático K. G. Borodzkin, aluno de Vinogradov, mostrou que o fato de este remover a hipótese de Riemann teria um problema: "suficientemente grande" na sua prova seriam números maiores que $10^{7.000.000}$. Esse valor foi depois melhorado, mas, ainda assim, é absurdamente maior do que os valores encontrados por Lucke e Littlewood. Perceba, então, que o fato de utilizar a hipótese de Riemann nesse contexto diminui consideravelmente o valor a parir do qual um número será considerado "suficientemente grande".

A década de 1960, marcada por vários acontecimentos em todo o mundo, tais como o início da Guerra do Vietnã, os assassinatos de Martin Luther King Jr. (1929-1968) e Robert F. Kennedy (1917-1963) e a chegada do homem à Lua, foi marcante também no que diz respeito ao avanço no conhecimento sobre a conjectura de Goldbach.

O resultado de Brun (já otimizado antes) foi novamente aprimorado em 1962, quando o matemático chinês Wang Yuan (1930-2021) (assumindo a hipótese de Riemann) afirma que *todo número par suficientemente grande é a soma entre um número primo e o produto de no máximo 3 fatores primos*. Neste mesmo ano este resultado também foi verificado para o caso em que um dos números é o produto de no máximo 5 fatores, pelo também chinês Chengdong Pan (1934-1997), e para o caso em que um dos números é o produto de no máximo 4 fatores, pelo russo Mark Borisovitch Barban (1935-1968).

Mas é em 1966, em um trabalho nomeado *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, que surge o resultado considerado o mais importante alcançado até hoje: o matemático chinês Chen Jingrun (1933-1996), superando Wang, Pan e Barban, que 4 anos antes tinham alcançado resultados incríveis, demonstrou que *todo número par suficientemente grande é a soma de um número primo e um produto de, no máximo, dois primos.*

O resultado de Chen é considerado o mais bem sucedido até o momento por conta de dois aspectos: o primeiro, é o fato de ele não utilizar a hipótese de Riemann; o segundo, porque é o enunciado mais próximo que se tem do da conjectura forte de Goldbach.

Para chegar a esta conclusão, Chen utilizou, além dos trabalhos já existentes no que dizia respeito à conjectura, os seguintes teoremas, que são específicos da Teoria dos Números: o Teorema dos Números Primos, o Teorema de Bombieri–Vinogradov, o Teorema de Siegel-Walfisz e o Teorema de Jurkat-Richert.

Em 2006 foi erguida uma estátua feita de bronze em homenagem a Chen, no campus da Universidade Xiamen, em Fuzhou, na China. É uma representação de seu trabalho árduo e dedicação à sua pesquisa. Além disso, foi lançado um selo comemorativo, objeto de coleção para os matemáticos do país.

Quase 10 anos depois do resultado de Chen, surge um que poderia ter sido um "divisor de águas" na busca pela prova da conjectura de Goldbach, que é o teorema de Montgomery e Robert Vaughan (1945-): *seja E(X) a função que conta os números pares não excedendo X, que não podem ser escritos como soma de dois primos. Então,* $E(X) \ll X^{1-\delta}$*, onde δ é uma constante positiva*. O problema dessa afirmação, como é fácil de imaginar, residia no fato de X e δ serem desconhecidos. Apesar disso, o resultado de Montgomery e Vaughan nos diz que a probabilidade de um número não ser representável como a soma de dois primos é muito pequena. Em 1980, 5 anos depois, os trabalhos de Chengdong Pan e Chen estimaram que $\delta > 0,04$.

Em 1989, os matemáticos Chen (novamente) e T. Z. Wang (1933-2017) reduzem o número encontrado por Borodzkin em 1956 para $10^{43.000}$. Sete anos depois, o diminuem novamente para $10^{7.194}$. No entanto, checar os demais casos, até para os computadores mais modernos, é impossível.

O resultado de Schnirelmann de 1930 foi melhorado, em 1995, pelo matemático francês Olivier Ramaré (1965 -), que conseguiu provar que *todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de, no máximo, 6 números primos.*

No final da década de 90, mais precisamente em 1997, temos o penúltimo resultado obtido no século XX: os matemáticos franceses Jean-Marc Deshouillers (1946-) e Gérard Effinger (1945-2019) e o holandês Hendrik te Riele (1947-) mostraram que *a hipótese de Riemann implica a conjetura fraca de Goldbach, para todos os números ímpares*. Em outras palavras, demonstraram a conjectura fraca de Goldbach a partir de resultados que foram previamente provados assumindo a hipótese de Riemann.

Em 2000, surge o último do século: o matemático asiático Hongze Li determina que na teoria de Montgomery e Vaughan, $\delta \approx 0,086$[22].

4.3 SÉCULO XXI

Diferentemente do que muitos pensam, atualmente existem importantes matemáticos que trabalham incisivamente para que as áreas já existentes da Matemática continuem a ser exploradas, bem como novas áreas possam ser descobertas, possibilitando, dessa maneira, que a Matemática esteja em constante evolução. Nesse sentido, podemos citar o matemático australiano Terence Tao (1975-), o russo Grigori Perelman (1966-), o britânico Ben Green (1977-), a iraniana Maryam Mirzakhani (1977-2017) e o francês Cédric Villani (1973-).

No que tange especificamente à conjectura de Goldbach, o primeiro resultado surge logo no início do século, entre 2001 e 2002, quando os chineses Ming-Chit Liu (1937-2023) e T. Z. Wang reduzem o valor que era até 1996 de $10^{7.194}$ para $10^{1.346}$.

Alguns anos depois, em 2010, o matemático chinês Wen Chao Lu determina um valor mais preciso para a constante δ do teorema de Montgomery e Vaughan: $\delta \approx 0, 121$.

Em 2012, Terence Tao prova que *todo número ímpar pode ser escrito como a soma de no máximo 5 números primos*.

Pouco tempo depois o matemático peruano Harald Helfgott (1977-), até então não muito conhecido na comunidade matemática, apresentou, após 7 anos de pesquisa, uma demonstração incondicional para a conjectura fraca de Goldbach, isto é, uma demonstração independendo da hipótese de Riemann.

A conjectura fraca fora verificada computacionalmente em 2011 pelo britânico David Platt para todos os números ímpares n, tais que $7 < n \leq 1, 23163 \cdot 10^{27}$. Platt, no entanto, fez isso assumindo a hipótese de Riemann. Posteriormente, em 2013, eles verificam, desconsiderando tal hipótese, que a conjectura fraca de Goldbach se aplica para todos os ímpares até $8, 875 \cdot 10^{30}$. Com isso, o que ele faz posteriormente é mostrar, analiticamente, que ela também se aplica para os demais números ímpares.

Segundo Helfgott (2013, p. 3), provas analíticas frequentemente estabelecem um resultado para inteiros acima de uma constante particular. Além de demonstrar a existência de uma representação numérica específica (como a soma de três números primos), uma prova analítica também fornece uma estimativa do número ponderado de maneiras de realizar essa representação.

Tal conquista lhe rendeu o Prêmio de Pesquisa Humboldt, concedido pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha, além de uma quantia em dinheiro.

Em 2014, o matemático polonês Adrian Dudek provou que *todo número inteiro maior que dois é a soma de um número primo e um número livre de quadrados*, que é uma consequência do resultado de Estermann, de 1932.

O resultado de Chen, considerado o mais bem sucedido até hoje, foi aprimorado em 2015 pelo matemático japonês Tomohiro Yamada, o qual determinou que "suficientemente grande" na prova de Cheng seria todo número maior que $1, 7 \cdot 10^{1.872.344.071.119.343}$.

Indiscutivelmente, uma marca do século XXI é a tecnologia, que como nos explica

Santos, Medeiros e Ribeiro (2017, p. 83):

> Na sociedade contemporânea, o homem divide espaço com as máquinas, e as relações constituídas por ambos se tornam cada vez mais intrínsecas. Seja no lar, no trabalho, na escola, nos parques, em diversos espaços e ambientes sociais, a tecnologia possui seu lugar de utilidade, sendo, muitas vezes, uma necessidade. É quase impossível imaginar a sobrevivência do homem sem a tecnologia nos dias atuais. O modo frenético como crianças, jovens e adultos consomem tecnologias e mídias no modelo de sociedade atual é a prova de que a era digital revolucionou o comportamento, os sentimentos, a educação, o modo de viver, ser e pensar dos indivíduos.

Essa utilidade citada pelos autores também tem sido vista diretamente na Matemática. Por exemplo, cálculos que antes poderiam demorar horas para serem concluídos hoje são realizados em questão de segundos. Além disso, a tecnologia pode ser levada também para a sala de aula, prática esta que tem sido cada vez mais comum e necessária.

Ela tem sido utilizada também para tentar entender melhor a conjectura de Goldbach, uma vez que esta também pode ser estudada por métodos mais mecânicos, através do uso de computadores. Nesse método, tenta-se forçosamente encontrar os dois números primos que somam cada número par. Obviamente, não existe computador capaz de verificar isso para todos os números, já que estes são infinitos. O objetivo ao se empregar esse método é tentar descobrir se existe alguma regra (algum padrão) no comportamento desses números. Ou, até mesmo, encontrar um contra-exemplo, ou seja, um número par que não pode ser escrito como a soma de dois primos, o que refutaria a conjectura de Goldbach.

O melhor resultado alcançado até o momento através da tecnologia é do professor Tomás Oliveira e Silva, do Departamento de Eletrônica, Telecomunicações e Informática da Universidade de Aveiro, Portugal. Ele verificou computacionalmente que *todos os números pares até* $4 \cdot 10^{18}$ *podem ser escritos como a soma de dois primos*. Isso, evidentemente, não é por si só suficiente para provar a conjectura. No entanto, pode ser uma importante fonte para eventuais futuras pesquisas computacionais.

No início dessa década, em 2020, os matemáticos Forrest J. Francis e Ethan S. Lee estabelecem sobre o trabalho de Dudek condições de divisibilidade no número livre de quadrados. Em 2022, o número encontrado por Yamada é levemente melhorado. Os matemáticos Matteo Bordignon, Daniel R. Johnston e Valeriia Starichkova determinaram que "suficientemente grande" no resultado de Chen seria todo número maior que $e^{e^{32,6}}$. Pouco tempo depois, assumindo a hipótese de Riemann, reduziram tal número para $e^{e^{15,85}}$.

Após isso, surgiram estudos baseados nos resultados listados até aqui, mas que não os superaram. Por exemplo, Daniel R. Johnston e Valeriia V. Starichkova (novamente), inspirados pelos resultados de Estermann e Rényi, mostraram que todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de um primo e um número com no máximo 369 fatores primos. Também mostraram, sob a suposição da hipótese de Riemann, que esse resultado pode ser melhorado para 33 fatores primos. Como já dito, tais demonstrações não foram um avanço em relação ao que já existia.

Muitas supostas provas da conjectura de Goldbach são divulgadas na internet vindas de todo o mundo. Por um lado, isso demonstra o interesse de muitos matemáticos amadores pela conjectura. Por outro, também pode levar a divulgação de informações falsas ou incompletas. Obviamente, todas foram desconsideradas por apresentarem falhas ou serem baseadas em premissas falsas.

O fato é que a importância desse problema para a comunidade matemática vai além do campo teórico. Se um dia for demonstrado, o matemático que o resolver será certamente reconhecido e premiado por seus pares, além de experimentar uma satisfação pessoal indescritível.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É inegável que houve progressos significativos na busca por uma demonstração da conjectura de Goldbach. Naturalmente, alguns desses avanços se destacam pela sua relevância, dentre os quais enfatizamos os resultados obtidos por Chen e por Montgomery e Vaughan.

O primeiro, acompanhado de seu posterior refinamento alcançado recentemente, é o mais próximo que a humanidade chegou de uma prova para a conjectura de Goldbach. Esta combinação resulta então no seguinte teorema:

Teorema de Chen: *Todo número par maior que* $e^{e^{32,6}}$ *pode ser escrito como a soma de um número primo e o produto de, no máximo, dois números primos.*

A importância deste teorema não se restringe somente à conjectura de Goldbach, já que o caminho percorrido até ele permitiu o desenvolvimento e aperfeiçoamento de outras teorias matemáticas.

Embora seja um grande resultado, é indiscutível que ainda há um longo caminho a ser trilhado. De fato, perceba que, mesmo que o Teorema de Chen (refinado) tivesse sido ainda mais aperfeiçoado e nos dissesse hoje que *qualquer número par maior que* $e^{e^{32,6}}$ *pode ser escrito como a soma de dois primos*, isso não seria ainda o bastante para afirmarmos que a comunidade matemática estaria próxima da tão almejada prova para a conjectura de Goldbach.

Lembre-se que ainda restaria uma quantidade gigante de números entre $4 \cdot 10^{18}$ e $e^{e^{32,6}}$para serem verificados, com muitos possuindo uma quantidade inimaginável de dígitos. É uma tarefa que exige trabalho árduo e, infelizmente, não podemos afirmar algo preciso sobre o nível atual de interesse/comprometimento existente por parte dos matemáticos, principalmente.

Um outro resultado que merece ser mencionado aqui é o de Montgomery e Vaughan, de 1975. Eles provaram, relembrando, que *sendo E(X) uma função que conta os números pares não excedendo X, que não podem ser escritos como soma de dois primos, então* $E(X) \ll X^{1-\delta}$, onde δ é uma constante positiva. Hoje, a melhor aproximação que se tem para a constante é δ ≈ 0, 121. Dessa maneira, a afirmação acima pode ser reescrita como:

Teorema de Vaughan-Montgomery: *Seja E(X) a função que conta os números pares não excedendo X, que não podem ser escritos como soma de dois primos. Então,* $E(X) \ll X\ 0,879$. Este teorema pode ser uma opção interessante também para refutar a conjectura. Aqui, a preocupação não é determinar exatamente o número ou números que não podem ser expressos como a soma de dois números primos, mas sim verificar a existência desses números. Para isso, evidentemente, seria necessário ter um conhecimento melhor acerca do valor de X; sabemos, por mais que a princípio não ajude tanto, que $X > 4 \cdot 10^{18}$, de acordo com o trabalho de Oliveira e Silva. Além disso, perceba que, se existir outra aproximação para δ, especificamente com $\delta > 1$, a potência $X^{1-\delta}$ tenderia a 0 à medida que um X cada vez maior fosse considerado. Isso provaria a conjectura de Goldbach, uma vez que $E(X) \ll 1$.

Os trabalhos mais recentes, como o de Dudek, que provou que *todo número inteiro maior que dois é a soma de um número primo e um número livre de quadrados*, requerem melhorias substanciais. Na pesquisa de Dudek, por exemplo, a lista de números livres de quadrados é infinita, o que faz com que o seu resultado ainda necessite de aprimoramentos para ser realmente útil na busca pela prova da conjectura de Goldbach.

Certamente, é fundamental ressaltar a significância da confirmação da conjectura fraca na Matemática, particularmente na Teoria dos Números. Embora apenas a minoria de seus resultados possa ser aplicada em uma potencial demonstração da conjectura forte, a validação da versão mais simples feita por Helfgott desempenhou um papel crucial ao atrair novamente algum interesse da comunidade matemática em relação à conjectura mais desafiadora.

Acreditamos veementemente, portanto, que esta pesquisa alcançou os seus objetivos. Primeiramente, porque conseguimos elencar os resultados existentes na incansável busca pela prova dessa conjectura; depois, porque compreendemos historicamente como ela surgiu e, finalmente, porque destacamos aqueles resultados que parecem ser mais promissores em pesquisas futuras.

Reconhecemos, ademais, que esta pesquisa, como qualquer outra, apresenta suas limitações. A maior talvez seja o fato de não termos detalhado matematicamente o processo de construção de, pelo menos, alguns dos resultados, o que pode ser explanado em eventuais pesquisas futuras. Por outro lado, do ponto de vista acadêmico, ela contribuiu para a difusão deste problema que é ainda pouco discutido na nossa literatura, principalmente no que diz respeito ao elencamento das tentativas existentes.

Apesar dos intensos esforços dedicados até o momento pelos matemáticos, concluímos este trabalho com a crença de que algumas décadas de pesquisa, no mínimo, ainda serão necessárias para alcançar uma demonstração definitiva da conjectura de Goldbach, sentimento este corroborado pelo próprio Helfgott em um contato feito via e-mail, ao afirmar que: “I feel that Goldbach is still far. There has been significant progress this century towards twin primes and also towards Chowla's conjecture, but it may be that those problems, long considered to be of equal difficulty, indeed ‘morally equivalent’, are in fact somewhat easier. Or perhaps progress towards them will stall”. (“Sinto que Goldbach ainda está distante. Houve progressos significativos neste século em relação aos primos gêmeos e também em relação à conjectura de Chowla, mas pode ser que esses problemas, há muito considerados de igual dificuldade, de fato ‘moralmente equivalentes’, sejam um pouco mais fáceis. Ou talvez o progresso em relação a eles estagne”. - Tradução nossa).

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T. M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer, 1998. 352 p.

BITENCOURT, C. DA S. A Conjectura de Goldbach e a Intuição Matemática. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3914&id2=150131131. Acesso em: 09 set. 2023.

BORDIGNON, M.; JOHNSTON, D. R.; STARICHKOVA, V. An explicit version of Chen's theorem. ArXiv (Cornell University), 2022. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/2207.09452.pdf. Acesso em: 28 set. 2023.

BORDIGNON, M.; STARICHKOVA, V. An explicit version of Chen's theorem assuming the Generalized Riemann Hypothesis. ArXiv (Cornell University), 2022. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/2211.08844.pdf. Acesso em: 28 set. 2023.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da Matemática. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 508 p.

CARELLA, N. A. Elementary Proof of the Siegel-Walfisz Theorem. ArXiv (Cornell University), 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2004.02010. Acesso em: 23 jun. 2023.

COLLINS, L. The ternary Goldbach conjecture. The University of Warwick, 2020. Disponível em: https://luke.collins.mt/maths-masters.pdf. Acesso em: 25 fev. 2023.

DALPIZOL, L. G. O conjunto excepcional do problema de Goldbach. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=001072924&loc=2018&l=cfcc65fd8ae2feb2. Acesso em: 15 set. 2023.

DÉCAILLOT, A-M. Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les Francais a la fin du XIX siecle. Kimé, Paris, 2008.

DESHOUILLERS, J.-M. et. al. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, [S.l.], v. 3, p. 99-104, 09/1997. Disponível em: https://www.ams.org/journals/era/1997-03- 15/S1079-6762-97-00031-0/S1079-6762-97-00031-0.pdf. Acesso em: 01 ago. 2023.

DESHOUILLERS, J-M.; RIELE, H. J. J. TE; SAOUTER, Y. New Experimental Results Concerning the Goldbach Conjecture. Proceedings of the Algorithmic Number Theory Symposium III. Reed College, Portland, Oregon, USA, June 21-25, 1998. Disponível em: https://ir.cwi.nl/pub/1222/1222D.pdf. Acesso em: 25 jul. 2023.

FARRUGIA, J. A. Brun's 1920 Theorem on Goldbach's Conjecture. 2018. Dissertation (Master's Degree in Mathematics) - Utah State University, Utah, 2018. Disponível em: https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8262&context=etd. Acesso em: 14 jul. 2023.

FRANCIS, F. J.; LEE, E. S. Additive representations of natural numbers. ArXiv (Cornell University), 2020. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/2003.08083.pdf. Acesso em: 03 set. 2023.

FUSS, P. H. Correspondance Mathématique Et Physique De Quelques Célèbres Géomètres Du XVIIIème Siècle. Saint-Pétersbourg: L'Académie Impériale des Sciences, 1843. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/correspondence/fuss/. Acesso em 05 jan. 2023.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

HARLAND, N. Large Sieve and Bombieri-Vinogradov Theorem. The University of British Columbia, 2011. Disponível em: https://personal.math.ubc.ca/~gerg/teaching/613-Winter2011/LargeSieveBombieriVinogradov.pdf. Acesso em: 19 maio 2023.

HELFGOTT, H. A. The ternary Goldbach conjecture is true. ArXiv (Cornell University), 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1312.7748.pdf. Acesso em: 29 jun. 2023.

HELFGOTT, H. A.; PLATT, D. J. Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to 8, 875 10^{30}. ArXiv (Cornell University), 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1305.3062.pdf. Acesso em: 07 maio 2023.

JURKAT, W.; RICHERT, H. An improvement of Selberg's sieve method I. Acta Arithmetica, New York, v. 11, p. 217-240, 1965. Disponível em: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/acta- arithmetica/all/11/2/95841/an-improvement-of-selberg-s-sieve-method-i. Acesso em: 02 ago. 2023.

LI, H. The exceptional set of Goldbach numbers: (II). Acta Arithmetica, [S.l.], v. 92, p. 71-88, 2000. Disponível em: http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa92/aa9217.pdf. Acesso em: 04 ago. 2023.

LIU, M. C.; WANG, T. Z. On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture. Acta Arithmetica, [S.l.], v. 105, p. 133-175, 2002. Disponível em: https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/acta-arithmetica/all/105/2/82946/on-the-vinogradov-bound-in-the-three-primes-goldbach- conjecture. Acesso em: 27 jul. 2023.

LU, W. C. Exceptional set of Goldbach number. Journal of Number Theory, Wuhan, v. 130, p. 2359-2392, 10/2010. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X10001320. Acesso em: 08 set.
2023.

MARTINEZ, F. B. *et. al*. Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 450 p.

MONTGOMERY, H. L.; VAUGHAN, R. C. The exceptional set of Goldbach's problem. Acta Arithmetica, v. 27, p. 353-370, 1975. Disponível em: http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa27/aa27126.pdf. Acesso em: 10 maio 2023.

METRING, R. A. Pesquisas Científicas: planejamento para iniciantes. Curitiba: Juruá, 2010.

RAMACHANDRA, K. Some remarks on a theorem of Montgomery and Vaughan. Journal of Number Theory, Bombay, v. 11, p. 465-471, 1979. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X79900118. Acesso em: 02 jun. 2023.

SEVERINO, A. J. Metodologia do Trabalho Científico. São Paulo, SP: Cortez, 2007.

SILVA, T. O. E. Goldbach conjecture verification. Home page of Tomás Oliveira e Silva, 2015. Disponível em: https://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html. Acesso em: 10 jun. 2023.

SILVA, T. O. E; HERZOG, S.; PARDI, S. Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to 4 10^{18}. Mathematics of Computation (American Mathematical Society), [S.l.], v. 83, n. 288, p. 2033 – 2060, 07/2014. Disponível em: https://www.ams.org/journals/mcom/2014-83-288/S0025-5718-2013-02787-1/S0025- 5718-2013-02787-1.pdf. Acesso em: 28 maio 2023.

SOUSA, J. E. Conjectura de Goldbach: uma visão aritmética. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2013. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/handle/10400.3/2881. Acesso em: 14 fev. 2023.

SOUZA, J. DE B. Conjecturas em Teoria dos Números e suas histórias. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/24394?locale=pt_BR. Acesso em: 10 set. 2023.

WANG, Y. The Goldbach Conjecture. 2. ed. Singapura: World Scientific, 2002. 344 p. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=001072924&loc=2018&l=cfcc65fd8ae2feb2. Acesso em: 06 mar. 2023.

YAMADA, T. Explicit Chen's theorem. ArXiv (Cornell University), 2015. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1511.03409. Acesso em: 12 jun. 2023.