


## Otimização multiobjetivo utilizando algoritmos evolutivos: Uma abordagem antifrágil na seleção de carteiras

 <https://doi.org/10.56238/sevened2024.010-024>

**Davi Riani Gotardelo**

Doutor em Modelagem Computacional – ITR/UFRRJ

**Guilherme Costa Obeica Pereira**

Graduando em Administração – ITR/UFRRJ

---

### RESUMO

Tendo em vista as dificuldades comprovadamente encontradas ao tentar aplicar empiricamente os modelos amplamente difundidos em seleção de carteiras que utilizam da relação média e variância como atributos centrais postulados por Markowitz e posteriormente incrementado no CAPM por Sharpe e utilizando como base as contribuições de Keating e Shadwick que apontaram as dificuldades do modelo CAPM em lidar com distribuições não normais, o presente estudo busca expandir os horizontes dessas teorias ao adicionar atributos não-convexos em uma otimização multiobjetivo utilizando de algoritmos evolutivos juntamente da implementação de uma métrica antifrágil CVIX, essa que busca avaliar a correlação condicional em relação ao VIX, para que dessa forma seja possível responder aos questionamentos sobre a possibilidade da existência de carteiras de mercado superiores a carteira de mercado teórica do CAPM. As otimizações foram aplicadas ao mercado americano, utilizando de janelas temporárias que percorrem os anos de 1994 até 2022. Os resultados são promissores pois ao contrário da otimização utilizando atributos puramente convexos que apresentou resultados inferiores em todos os cenários se comparados a aplicação do modelo OCAPM, a utilização da métrica antifrágil aliada a atributos não-convexos em uma otimização multiobjetivo apresenta resultados superiores.

**Palavras-chave:** Otimização Multiobjetivo, Algoritmos evolutivos, Antifragilidade, CAPM, OCAPM.

## 1 INTRODUÇÃO

No que se diz respeito à otimização de carteiras e formação de portfólios eficientes, ou seja, aqueles que buscam maximizar os retornos e mitigar os riscos associados ao assumir a racionalidade do investidor, é indispensável falar a respeito do arcabouço teórico deixado por Markowitz (1952). Este inaugurou a teoria moderna de finanças ao entender a lógica por trás das buscas dos investidores, associando esses anseios com dois atributos centrais: a média e a variância. Markowitz conceituou seu método de diversificação baseado na covariância entre ativos, dando origem à teoria de carteiras e à fronteira eficiente.

A partir desse disso, estudos como o de Sharpe (1964) buscaram expandir esse conceito em otimização. Sharpe (1964) propôs então o CAPM ao identificar que a diversificação proposta por Markowitz (1952) tratava bem da diminuição do risco não-sistemático, porém não era capaz de quantificar o risco sistemático. Portanto, não era possível medir o desempenho ajustado ao risco global da carteira.

Com o objetivo de construir uma métrica capaz de quantificar esses atributos que não eram precificados no modelo original de Markowitz (1952), Sharpe (1964), no modelo CAPM, que também teve importantes contribuições de outros autores como John Lintner (1965), introduziu a otimização um ativo livre de risco. Segundo o autor, em condições perfeitas, os retornos esperados dos ativos seriam representados pelo rendimento de um ativo livre de risco, com um acréscimo relativo ao risco assumido. Para ponderar essa relação, propôs a utilização do coeficiente Beta, que servirá para medir a sensibilidade ao risco do ativo, podendo assim quantificar o risco sistemático e a contribuição do ativo para o risco global da carteira.

Entretanto, apesar de amplamente reconhecido e aceito no mundo das finanças por oferecer fundamentação teórica robusta, sua aplicação prática vem sofrendo testes de validação ao longo de todos esses anos. O modelo apresenta dificuldades na sua aplicação empírica, primeiro em função da necessidade de se trabalhar com resultados passados para suas ponderações. É necessário a utilização de proxies de carteiras que somente serão capazes de estimar se a carteira está na fronteira de mínima variância. Segundo, como destaca Galagedera (2007), muitos estudos observam que o CAPM em sua forma básica pode não explicar completamente a variação dos retornos esperados dos ativos. Por esse motivo, deu origem a um fluxo contínuo de pesquisas buscando modelos alternativos de precificação. Como aponta Assaf Neto (2012), o foco atual é mais no aperfeiçoamento do CAPM do que na sua substituição.

Seguindo esse raciocínio, Vasconcelos et al (2013), utilizando das prévias contribuições de Keating e Shadwick (2002) e de Kazemi et al (2004) que deram origem à OPM (Omega Performance Measure), implementou essa nova medida ao modelo de otimização de Sharpe (1964). O objetivo era

utilizar o Omega para alterar a composição dos Betas com o objetivo de percorrer todos os momentos da distribuição e sanar lacunas do modelo.

Contextualizado o paradigma atual em otimização de carteiras a partir do modelo CAPM, chegamos ao objetivo principal deste artigo. O objetivo é, ao se beneficiar do arcabouço teórico deixado por todos os autores anteriormente citados em busca do aperfeiçoamento teórico e prático do CAPM, avaliar o desempenho de otimizações mono-objetivo com atributos convexos. Assim como a performance de otimizações multiobjetivo com a mediação feita por algoritmos evolutivos, em um primeiro momento apenas com a adição da medida  $\hat{\Omega}$  e *drawdown* máximo, posteriormente, juntamente delas mais um atributo: o CVIX. O objetivo final é, dessa forma, avaliar a viabilidade do incremento na otimização de carteiras desses atributos ao comparar suas contribuições.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

A revisão teórica foi feita percorrendo todas as principais teorias e conceitos utilizados para a execução dos experimentos e simulações de carteiras e, portanto, para a criação deste artigo como um todo. As teorias e conceitos utilizados foram: Teoria de Carteiras e Fronteira eficiente ambas introduzidas por Markowitz (1952), a contribuição de Sharpe (1964) que pode ser visto como uma evolução teórica de Markowitz já que utiliza das mesmas bases com a introdução do conceito de risco sistemático representado pelo coeficiente beta e a medida  $\hat{\Omega}$  na seleção de ativos proposta por Keating e Shadwick (2002). Também foram elencados alguns trabalhos recentes utilizando de algoritmos evolutivos para a seleção de ativos que julgamos apresentar contribuições relevantes ao tema.

### 2.1 TEORIA DE CARTEIRAS

O ganhador do Prêmio Nobel de Economia em 1990, Harry M. Markowitz apresentou muito antes de sua premiação, em 1952, o artigo *Portfolio Selection* que introduziu ao mundo uma perspectiva revolucionária para a época sobre a formação de portfólios de investimentos. Dentro do artigo, tanto a teoria de carteiras quanto o conceito da fronteira eficiente foram desenvolvidos e apresentados ao mundo. A ideia central proposta por Markowitz diz que os investidores deveriam considerar tanto o retorno esperado quanto sua variância na seleção de ativos, o retorno esperado é a métrica que deve ser maximizada, enquanto a variância deve ser minimizada por meio da diversificação de ativos com o menor índice de covariância entre si.

Markowitz (1952) afirma enfaticamente que a simples busca pela maximização do retorno esperado é um erro já que aplicar esse critério abre a possibilidade da seleção de 2 ou mais ativos de retornos similares que sem a avaliação de suas covariâncias podem representar um aumento significativo no risco global do portfólio. O autor ainda complementa que a escolha de um conjunto

de ativos que apresentam o máximo retorno esperado não necessariamente terá o menor risco associado, pois como foi dito anteriormente a mera diversificação sem prévia avaliação da covariância entre os ativos selecionados, considerando somente o número de ativos incluídos na diversificação, não diminuirá necessariamente o risco associado ao portfólio.

Dessa forma a maior contribuição do modelo de Markowitz (1952) a respeito da teoria de carteiras foi definitivamente a difusão da compreensão de que a diversificação por meio de ativos com níveis de covariância reduzidos é indispensável para a construção de um portfólio capaz de mitigar a variância ou seja a diminuição do risco associado aos retornos esperados.

Como foi dito anteriormente, os dois pontos de preocupação principais da teoria de carteiras são o retorno esperado e a variância, e dentro do modelo de Markowitz a representação matemática desses conceitos é feito da seguinte forma:

O retorno esperado  $R_p$  de uma carteira de ativos  $a_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , é expresso por sua média, dada por:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot R_i$$

onde  $W_i$  é o peso ou participação de cada ativo nessa carteira e  $R_i$  é o retorno esperado para cada um dos ativos.

Já a segunda métrica considerada, o risco representado pela variância  $\sigma^2$  ou da mesma forma através de seu desvio-padrão  $\sigma$  e mitigado por meio do cálculo do coeficiente de correlação ou covariância dos ativos e pode ser expresso matematicamente assim:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}}$$

onde  $\sigma_{ij}$  representa a covariância entre os ativos  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  o que significa que  $\sigma_{ii}$  é a própria variância do ativo  $\alpha_i$ .

Dessa forma, por meio dos avanços tecnológicos e o surgimento da programação quadrática tornou-se possível a construção do portfólio sugerido por Markowitz, pois uma vez calculados os retornos esperados e as variâncias esperadas para cada ativo, assim como a covariância esperada para cada par de ativos e variando assim as composições  $W_i$  é possível construir todas as carteiras possíveis com o conjunto de ativos selecionados que devem respeitar a restrição de não alavancagem. A restrição

de não alavancagem implica na soma dos pesos dos ativos ser menor ou igual a 1 e maior ou igual a 0, essa restrição pode ser visualizada matematicamente por meio da fórmula a seguir:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \text{ (todo o capital deve ser aplicado)}$$
$$0 \leq w_i \leq 1 \text{ (não alavancagem)}$$

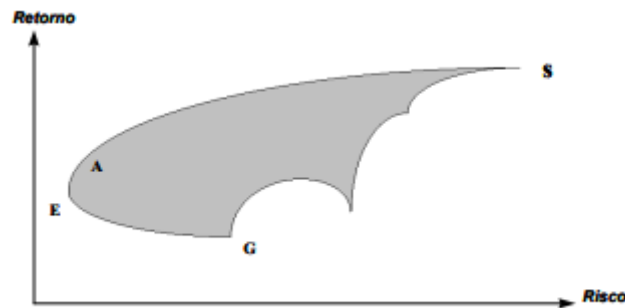
As contribuições feitas por Markowitz (1952) seguiram sendo relevantes depois de todo esse tempo, e mudaram a forma como a formação de carteiras era vista para sempre, e serviu de base para outros importantes avanços na área como afirmam Tambosi Filho e Silva (2000, p.1) “Após o trabalho de Markowitz (1952), intitulado de *Portfolio Selection*, diversos outros trabalhos surgiram, com a proposta ou simplificação da formulação original”. O CAPM de Sharpe (1964) é um exemplo que estendeu o modelo, e continua sendo utilizado como fundamentação teórica até mesmo por este artigo onde as premissas foram aplicadas com objetivo de superar as dificuldades de sua aplicação prática e defasagem que sofreu ao longo do tempo. A teoria de carteiras também deu origem ao conceito de fronteira eficiente que será trabalhado no tópico seguinte, e é complementar a essa seção.

## 2.2 FRONTEIRA EFICIENTE

Para compreender a formação da fronteira eficiente de Markowitz é necessário resgatar alguns conceitos apresentados na teoria de carteiras, já que a fronteira é produto do método de combinações de ativos e formações de carteiras previamente apresentado. Seguindo esse raciocínio é de suma importância entender que a fronteira eficiente é resultado da implementação das variáveis que foram priorizadas por Markowitz (1952), os retornos esperados representados pelo cálculo de suas médias levando em conta os pesos associados a cada ativo, o risco expresso pela variância desses retornos, e não menos importante a covariância esperada para cada par de ativos, a partir disso é possível estimar os retornos esperados e as variâncias e covariâncias para todas as combinações possíveis de carteiras com o grupo de ativos selecionados por meio da variação dos pesos associados a cada ativo, dando origem a um conjunto de hipérbolos.

Além disso a formação da carteira de ativos de risco de Markowitz (1952) também deve respeitar a restrição de não alavancagem que consiste na soma dos pesos ser igual ou menor que 1 e igual ou maior que 0, dessa forma é possível transformar o conjunto de hipérbolos previamente citado em um conjunto compacto que dará origem a chamada Região Factível.

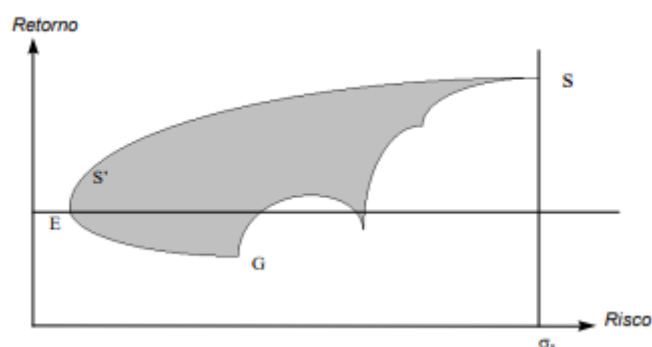
A obtenção da região factível pode ser visualizada graficamente a seguir:



Onde a região factível é representada especificamente pela letra A o que significa que qualquer ponto dentro dessa região está de acordo com as restrições, delimitando assim a área que nos interessa na formação de carteiras.

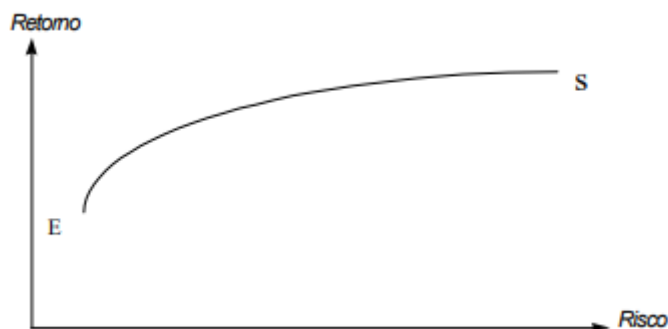
Agora é necessário entender mais um conceito que é utilizado na formação da fronteira eficiente, o princípio da dominância esse que é um conceito multidisciplinar, mas que aplicado a gestão de portfólios pode ser entendido como um portfólio que domina o outro se ele oferecer um retorno esperado mais alto para o mesmo nível de risco ou se ele oferecer o mesmo retorno esperado para um nível de risco menor. O conceito do princípio da dominância como foi descrito foi trabalhado tanto por Markowitz (1952) quanto por diversos outros autores nos mais diferentes campos do conhecimento como Howard Raiffa em *Decision Analysis* (1968).

Retomando a Figura 1, se aplicado o princípio da dominância obteremos o gráfico da Figura 2 e assumindo que o investidor é racional teremos 2 pontos de interesse no gráfico, o ponto E que representa o risco mínimo e o ponto S que representa o ponto de máximo retorno.



Levando em consideração o objetivo primário da otimização (obtenção de carteiras que oferecem o máximo retorno esperado para diferentes níveis de risco) podemos assumir que para cada carteira com risco entre  $\sigma_E$  e  $\sigma_S$  a de retorno máximo está situada na fronteira superior da região S. O resultado, portanto, dessa combinação de pontos dará origem a curva ES, está que em última análise consiste na fronteira eficiente de Markowitz (1952).

A formação da curva ES e por consequência a fronteira eficiente pode ser visualizada a seguir:



Dessa forma cada ponto da curva, ou seja, da fronteira, representa uma carteira eficiente já que apresenta o maior retorno dentre as possíveis para aquele nível de risco, o que possibilita ao investidor delimitar as melhores combinações possíveis segundo as métricas consideradas por Markowitz (1952) eliminando assim uma infinidade de carteiras não eficientes na relação risco-retorno facilitando a tomada de decisão.

Assim o investidor poderá a partir dos pontos da fronteira escolher aquela que mais se encaixa em seu perfil. Importante ressaltar que a formação da fronteira eficiente não depende do perfil do investidor, sendo puramente uma relação lógica matemática, a escolha da carteira presente dentro da fronteira que sim depende do perfil de risco do investidor assim como seus objetivos.

O mapeamento dessas necessidades para serem relacionados a fronteira eficiente pode ser feito por exemplo por meio da curva de utilidade, onde por meio da sobreposição das curvas de utilidade sobre a fronteira de forma a identificar a que irá tangenciar a curva ES, mostrando o ponto que representa a carteira mais adequada para o investidor em questão.

### 2.3 CONTRIBUIÇÃO DE SHARPE

William Sharpe em 1964 propôs o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) fundamentado na teoria de Markowitz (1952) que foi destrinchada nos 2 tópicos anteriores. Dessa forma o modelo CAPM pode ser considerado uma extensão do modelo proposto por Markowitz, pois Sharpe (1964) utilizou da fundamentação teórica proposta para a construção de seu modelo, adicionando ao cálculo o índice beta e um ativo livre de risco (representado comumente por títulos do governo) a fim de construir uma métrica capaz de quantificar o desempenho ajustado ao risco de uma carteira. Esse que também teve importantes contribuições ao longo dos anos como de Jack Treynor (1962), John Lintner (1965), Jan Mossin (1966), Tobin (1958) e Black (1972).

O cerne da teoria de Markowitz está na ideia de que os investidores têm uma preferência microeconômica pelo retorno em relação ao risco. Sharpe buscando expandir esse entendimento, ao

perceber que apesar da diversificação proposta por Markowitz (1952) tratar bem da redução do risco não sistemático (microeconômico) ela não era capaz de precificar o risco sistemático (macroeconômico).

Seguindo esse raciocínio, Sharpe, se apoiando nas premissas tanto de Markowitz (1952) quanto na teoria de utilidade e na hipótese da eficiência de mercado postulou que, em condições perfeitas, o retorno esperado de um ativo de risco se dá pelo retorno esperado de um ativo livre de risco com um acréscimo do prêmio relativo ao risco assumido, o prêmio então seria o resultado da diferença entre o retorno do ativo livre de risco e o ativo de mercado com risco associado. Para ponderar essa relação Sharpe (1964) propôs a utilização do coeficiente beta esse que servirá para medir a sensibilidade ao risco que o ativo possui, portanto, medindo seu risco sistemático associado, esse que não pode ser extinto por meio da diversificação proposta anteriormente por Markowitz (1952). Dessa forma se deu a criação do modelo CAPM que serve para medir se o risco assumido está de acordo com o retorno esperado levando em consideração a sensibilidade ao risco do ativo, isto é, o risco não sistemático associado, possibilitando assim determinar teoricamente se o risco do ativo oferece rentabilidade compatível com o risco a que ele expõe o investidor.

A contribuição de Sharpe (1964) deu origem, portanto à fórmula convencional do modelo CAPM:

$$R_i = R_f + \beta (R_M - R_f)$$

Onde

- $R_i$  representa o retorno esperado do ativo  $i$
- $R_f$  representa o ativo livre de risco (a exemplo do título do tesouro dos EUA)
- $B$  é o índice beta (Indicador de sensibilidade do retorno do ativo em relação ao retorno do mercado, se  $B = 1$  o ativo tende a se mover em sintonia com o mercado, se  $B > 1$  o ativo tende a ser mais volátil do que o mercado, e se  $B < 1$ , tem uma sensibilidade menor aos movimentos do mercado)
- $R_m$  representa o retorno esperado do mercado

A relação  $(R_m - R_f)$  também pode ser chamada de prêmio de risco, já que representa a recompensa esperada por investir em um ativo de risco em vez do ativo livre de risco. Outro fator a ser observado é a linearidade da equação que possibilita ao manter constantes as variáveis  $R_f$  e  $R_m$  e utilizando um mesmo período de tempo chegar à conclusão de que ativos que possuem o índice beta maior apresentarão tanto retornos maiores quanto perdas mais significativas, sendo a relação inversa



quanto ao beta também verdadeira, ou seja, o ativo que possuir um beta menor apresentará retornos menores assim como riscos menores.

Apesar de ser amplamente reconhecido e aceito no mundo das finanças, o CAPM não está isento de críticas. Desde a sua concepção, a validade do modelo tem sido repetidamente testada. Conforme destaca Assaf Neto (2012), o foco atual é mais no aperfeiçoamento do CAPM do que na sua substituição. Muitos estudos observaram que o CAPM, em sua forma básica, pode não explicar completamente a variação dos retornos esperados dos ativos. A existência de lacunas na teoria deu origem a um fluxo contínuo de pesquisas buscando modelos alternativos de precificação, como aponta Galagedera (2007).

## 2.4 MEDIDA ÔMEGA

Para tratar da medida ômega é importante contextualizar o seu surgimento que irá complementar os tópicos anteriores e dar um senso de continuidade, isso porque como foi discutido anteriormente ao se falar da contribuição de Sharpe (1964) e de Markowitz (1952) apesar de fornecerem arcabouço teórico consistente para inaugurar a moderna teoria de finanças elas ainda apresentavam lacunas que ao longo dos anos foi alvo de estudo por diversos autores como por exemplo Keating e Shadwick (2002) que ao observarem que o modelo proposto por Markowitz (1952) apresentava complicações ao trabalhar com distribuições não normais sugeriram a utilização da medida Omega essa que leva em conta todo o formato da distribuição de retornos do ativo para avaliação de seu risco associado.

Baseados nessa perspectiva, críticos a simplificação de que média e variância seriam capazes de descrever completamente a distribuição dos retornos, passaram a utilizar a medida Omega com a finalidade de poder computar o impacto total da distribuição ao contrário de Markowitz (1952) que estimava apenas dois momentos individuais. Dessa forma a medida de performance Omega formulada por Keating e Shadwick (2002) foi definida sua aplicação a partir da definição de um limite externo ao modelo, definido pelo investidor e que normalmente é a taxa livre de risco, esse limite é responsável por dividir a distribuição de probabilidades de retornos em duas áreas, a área de retornos essa localizada a direita do L (limite) e a área de perdas que se encontra à esquerda do L. Ao definir o limite para a utilização da medida Omega Keating e Shadwick ainda postularam que ele deve ser o valor mínimo de ganho esperado pelo investidor, e por isso constantemente é utilizada a taxa livre de risco por ser geralmente o índice de rendimento comparativo por se tratar de um retorno “garantido”.

Esse raciocínio deu origem a fórmula original da medida de performance Omega que definida como:

$$\Omega(L) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx}$$

Onde:

F = função de distribuição cumulativa dos ganhos

L = nível mínimo requerido de ganhos

a = retorno mínimo

b = retorno máximo

(a,b) = Limites inferiores e superiores respectivamente da faixa de retornos da distribuição.

Na maioria das vezes  $a = -\infty$  e  $b = \infty$

$I_2(L)$  = A média ponderada de ganhos acima de L

$I_1(L)$  = A média ponderada de perdas abaixo de L

Dessa forma, utilizando a função Omega (L) é possível realizar a comparação entre os retornos esperados de diferentes ativos e classificá-los em relação ao seus Omegas. Sendo assim um Omega maior indicará que o ativo se trata de um investimento melhor, visto que  $\Omega(L) = 1$  significa que os ganhos ponderados se igualam às perdas ponderadas, e deve-se buscar um Omega sempre maior que 1 pois isso indicará que a probabilidade ponderada de retornos acima do limite é maior que a probabilidade ponderada de retornos abaixo do limite.

A medida Omega como foi apresentada anteriormente pode ser comprovadamente representada de forma alternativa, essa forma mais simples foi postulada por Kazemi et al (2004) e a forma em que Kazemi chegou a essa conclusão pode ser visualizada matematicamente da seguinte forma:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx} = \frac{\int_L^b (x - L) f(x) dx}{\int_a^L (L - x) f(x) dx} = \frac{E[\max(x - L; 0)]}{E[\max(L - x; 0)]} = \frac{EG(L)}{EL(L)}$$

Em que como podemos observar resultará na equação final simplificada:

$$\Omega(L) = \frac{EG(L)}{EL(L)}$$

O que ilustra o cerne da medida Omega e pode ser interpretado como  $EG(L)$  o numerador que representa o valor esperado do excesso de ganho  $(x-L)$  conhecido como *Expected Gain* (EG) enquanto o denominador é o valor esperado da perda  $(L-x)$  chamado de *Expected Loss* (EL). Essa relação

também pode ser entendida como “o que se espera ganhar caso se ganhe comparado com o que é esperado perder caso se perca”.

A prévia explicação e validação teórica da fórmula simplificada da medida Omega de Keating e Shadwick (2002) feita por Kazemi et al (2004) será especialmente útil para o entendimento do OCAPM já que essa medida desempenha um papel central no modelo.

O modelo Omega CAPM ou OCAPM utiliza do arcabouço teórico desenvolvido por Markowitz (1952) e Sharpe (1964) juntamente da OPM (*Omega Performance Measure*) primeiramente apresentada por Keating e Shadwick (2002) e refinada posteriormente por Kazemi et al (2004) em sua composição, e tem como objetivo usar o OPM em vez da relação média-variância dos modelos anteriores por meio da modificação de seus betas e teve sua primeira literatura relevante escrita por Vasconcelos et al (2013).

Resgatando a equação postulada por Kazemi et al (2004) a OPM:

$$\Omega = \frac{\int_L^b (x - L) f_X(x) dx}{\int_a^L (L - x) f_X(x) dx} = \frac{EC}{ES} = \frac{E[\text{Max}(X - L; 0)]}{E[\text{Max}\{L - X; 0\}]}$$

E seguindo as orientações descritas pelo modelo de Vasconcelos et al (2013) onde todos os processos algébricos detalhados podem ser encontrados e onde ele utiliza das premissas que compõem o modelo CAPM de Sharpe (1964) como o entendimento da impossibilidade de zerar os riscos sistemáticos e a noção previamente introduzida por Markowitz (1952) da possibilidade de redução do risco não sistemático por meio da diversificação, é possível chegar a equação final do modelo OCAPM que pode ser encontrada abaixo:

$$E[R_i] = L + \beta_i(E[R_m] - r_f)$$

Essa que em um primeiro momento pode ser confundida com a fórmula original do CAPM pois sua composição é idêntica, a não ser pela composição do Beta, pois o modelo OCAPM foi construído a partir da medida Omega para que por meio de sua utilização no lugar da relação linear média-variância do modelo original seja possível por meio da utilização do Omega compreender todos os termos da distribuição de retornos esperados. Onde  $\beta_i$  é igual a:

$$\beta_i = E \left[ \frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|} \right] \frac{1}{E[|R_m - L|]}$$

Apenas uma restrição prática deve ser respeitada, apesar de não ser uma restrição teórica se  $R_m$  for igual a  $L$  resultando em 0 o Beta não poderá ser definido, sendo assim a restrição que se aplica ao modelo é  $|R_m - L|$  deve ser diferente de 0. A interpretação dos Betas do modelo OCAPM é a mesma do modelo CAPM apesar de não representarem a mesma relação, uma vez que o Beta do CAPM representa a relação entre covariância e variância, enquanto no OCAPM também considera todas as distribuições de retornos acima e abaixo de  $L$ .

## 2.5 TRABALHOS RECENTES ENVOLVENDO SELEÇÃO DE CARTEIRAS UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Nesse tópico foram elencados alguns trabalhos recentes que utilizaram de algoritmos evolutivos para a seleção de carteiras. Junto ao nome do artigo será anexado um breve resumo dos objetivos e resultados apresentados.

Começando com o interessante artigo de Khin Lwin et al (2014) em que os autores propõem uma abordagem diferente dos chamados Algoritmos Evolucionários Multiobjetivos (MOEAs), com o objetivo de expandir o algoritmo DEMO. Esse algoritmo representa uma das abordagens recentes que combinam as vantagens do DE (R. Storn e K. Price) com os mecanismos de ordenação baseada em Pareto e ordenação por distância de multidão.

Para os experimentos, os autores avaliaram o desempenho de quatro MOEAs: o Algoritmo Genético de Classificação Não Dominada (NSGA-II), o Algoritmo Evolucionário de Pareto de Força (SPEA2), o Algoritmo de Seleção com Base no Envelope de Pareto (PESA-II) e a Estratégia de Evolução Arquivada de Pareto (PAES). As otimizações consideraram até 1318 ativos.

O funcionamento do DEMO envolve a manutenção de uma população de indivíduos, onde cada um representa uma possível solução para o problema de otimização. Durante o processo de evolução, o DEMO permite que a capacidade de sua população seja expandida para incluir soluções recém-encontradas que não são dominadas por outras. Isso possibilita que essas novas soluções não dominadas participem imediatamente na geração de soluções candidatas subsequentes. Essa característica do DEMO promove uma rápida convergência em direção à verdadeira fronteira de Pareto.

Os autores, seguindo o esquema geral do DEMO, apresentam um algoritmo evolutivo multiobjetivo orientado pelo aprendizado chamado MODEwAwI (*Learning-Guided Multi-Objective Evolutionary Algorithm*). As principais diferenças entre o MODEwAwI e o DEMO convencional podem ser encontradas no artigo, juntamente com o código, as restrições propostas e a maneira como foram implementadas.

Os resultados obtidos com o MODEwAwI são significativos e promissores. Os autores destacam que o MODEwAwI não apenas é capaz de gerar portfólios de alta qualidade com restrições

adicionais, mas também é eficaz na resolução de um número razoável de ativos (até 1318). Além disso, o algoritmo proposto superou os quatro MOEAs mais amplamente utilizados: NSGA-II, SPEA2, PESA-II e PAES.

Mishra et al (2016) apresentam um novo modelo de otimização de portfólio denominado PBMV (*Prediction Based Mean-Variance*), como uma alternativa ao tradicional modelo de média-variância de Markowitz, para resolver o problema de otimização de portfólio com restrições. No modelo de Markowitz, o erro segundo os autores é a utilização da média dos retornos passados como uma estimativa do retorno futuro. No PBMV, os retornos futuros esperados são previstos com o uso de uma rede neural artificial de baixa complexidade. A otimização do portfólio é então realizada por meio de algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs). Além disso, é proposto e empregado um algoritmo de otimização multiobjetivo baseado em inteligência de enxame chamado SR-MOPSO (*Self-Regulating Multiobjective Particle Swarm Optimization*) para solucionar o problema.

O estudo compara as soluções de Pareto obtidas pelo PBMV com aquelas obtidas pelo modelo de Markowitz e por outros dois MOEAs competitivos, utilizando seis métricas de desempenho e as fronteiras de Pareto. Também é realizada uma análise estatística não paramétrica para comparar o desempenho dos algoritmos em pares. Os resultados revelam que a abordagem baseada no modelo PBMV oferece melhores soluções de Pareto, mantendo uma diversidade adequada, e é comparável ao modelo de Markowitz. Notavelmente, o algoritmo SR-MOPSO baseado no PBMV se destaca como a melhor opção em relação os MOEAs avaliados. Esses resultados têm implicações significativas para a otimização de portfólio com restrições e podem ser aplicados a outros problemas práticos.

Em adição, além dos 2 artigos anteriormente citados, o trabalho feito por Silva et al (2019) se mostra relevante em frente aos resultados apresentados e reivindicados pelos autores, onde no trabalho eles abordam várias variantes do problema de seleção de portfólio de média-variância (PSP) por meio de uma abordagem unificada de otimização multiobjetivo (MO) utilizando o algoritmo *Adaptive Ranking Multi-Objective Particle Swarm Optimization* (ARMOPSO). O ARMOPSO introduziu um procedimento de classificação com base em ordenação não dominada, distância de multidão e um novo mecanismo chamado custo-benefício. Esse segundo os autores é uma das primeiras abordagens genéricas para lidar com várias variantes do PSP em um único framework, de acordo com uma revisão extensiva da literatura sobre PSP dos últimos 20 anos feita pelos pesquisadores envolvidos.

O ARMOPSO foi testado em cinco variantes do PSP de média-variância, incluindo restrições típicas de mercados financeiros, como limites mínimo e máximo, cardinalidade, tamanhos de lotes inteiros e pré-atribuição. Os resultados foram comparados utilizando várias métricas específicas, como espaçamento (S), distância geracional (GD), métrica de diversidade, hipervolume (HV), erro (Er), erro

médio de retorno (MRE), variância do erro de retorno (VRE), assim como erro percentual médio (MPE), mínimo (MinPE), máximo (MaxPE) e mediana (MedPE).

Os resultados das extensas experimentações computacionais demonstraram que o ARMOPSO alcançou um desempenho altamente competitivo em todas as variantes e na maioria das métricas avaliadas, quando comparado aos métodos específicos para problemas propostos na literatura. Isso destaca não apenas a eficiência do método unificado, mas também sua notável robustez.

Os autores ainda ressaltam que trabalhos futuros podem envolver o desenvolvimento de maneiras mais eficazes de lidar com a dificuldade de aplicação prática, ajudando o algoritmo a encontrar soluções não dominadas aprimoradas e, conseqüentemente, uma fronteira de melhor qualidade. Avanços nesse sentido também podem reduzir o tempo de CPU gasto pelo procedimento, especialmente para instâncias de grande porte. Além disso, acredita-se que o ARMOPSO pode ser aplicado para resolver outros problemas multiobjetivos.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 COLETA DE DADOS

Para este estudo foram escolhidas as empresas americanas que compõem o Índice Dow Jones. Os preços de fechamento diário dos ativos de cada mercado foram coletados e, em seguida, foi calculado o logaritmo da variação diária dos preços, preparando-os para as análises subsequentes. Foram excluídos da amostra aquelas empresas que apresentaram menos de 30% dos preços em relação aos dias coletados.

As janelas temporais foram definidas da seguinte maneira:

Janela 1 (*in-sample*) 1994-1998, janela 2 (*out-of-sample*) 1999-2003.

Janela 3 (*in-sample*) 2004-2008, Janela 4 (*out-of-sample*) 2009-2013.

Janela 5 (*in-sample*) 2014-2018, Janela 6 (*out-of-sample*) 2019-2022.

#### 3.2 ABORDAGENS DE OTIMIZAÇÃO

Para a realização de todas as otimizações propostas por este trabalho foi utilizado o framework Spyder que trabalha por meio da linguagem de programação Python. As propostas de otimização em questão foram: (i) CAPM (Sharpe), (ii) Ômega CAPM (OCAPM), (iii) Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo 1 e 2

Em todas as otimizações foram aplicadas as seguintes restrições:

- 1- Restrição de cardinalidade: corresponde ao número máximo de ativos que o portfólio deve otimizar. O valor utilizado na pesquisa foi de 8
- 2 – Restrição orçamentária: diz respeito à soma dos pesos dos ativos sendo igual a 1
- 3 – Restrição de pesos dos ativos: O peso de cada ativo deve ser maior ou igual a 0

### 3.2.1 Otimização CAPM

Na otimização CAPM foi utilizado o algoritmo desenvolvido por Sharpe, que tem em sua composição o objetivo de solucionar problemas de programação quadrática, encontrando os pesos dos ativos que maximizam a função objetivo na imagem a seguir:

$$\text{Maximizar } \sum_i w_i r_i - \frac{1}{r_t} \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Em que  $W_i$  são os pesos do  $i$ -ésimo ativo da carteira,  $R_i$  o retorno esperado do  $i$ -ésimo ativo,  $R_t$  é a tolerância ao risco do investidor e  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os retornos dos ativos.

Ainda é necessário maximizar o Índice de Sharpe por meio do problema de maximização descrito a seguir:

$$\text{SR} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} = (R_p - R_f) \sigma_p^{-1} = \left( \sum_i w_i r_i - R_f \right) \left( \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij} \right)^{-0.5}$$

sujeito a  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  e  $w_i \geq 0$

Em que  $R_p$  é o retorno do portfólio  $p$ ,  $R_f$  é a Taxa Livre de Risco, o  $\sigma_p$  é o desvio-padrão do portfólio  $p$ ,  $w_i$  e  $w_j$  são os pesos dos ativos  $i$  e  $j$  respectivamente,  $r_i$  é o retorno esperado do  $i$ -ésimo ativo e  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ .

A maximização das funções objetivo previamente citadas foram feitas por meio de experimentos computacionais através do framework Spyder que utiliza da linguagem de programação Python. O código foi alimentado pelo logaritmo da variação dos preços dos ativos do mercado de capitais tanto dos EUA quanto do Brasil e foi feito de forma mono-objetivo.

### 3.2.2 Otimização OCAPM

Para resolver a questão da maximização do Índice Ômega que é considerado um problema não-convexo é preciso realizar a resolução de uma família de programas lineares ou um único programa linear fracionário delimitando assim a área percorrida resolvendo o problema da não convexidade. O código referente a maximização previamente citada foi feito no Spyder com base no pacote Scipy.optimize na linguagem Python. A otimização do OCAPM também foi feita de forma mono-objetivo.

A fórmula da função objetivo do Índice Ômega pode ser visualizada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad \text{Índice Ômega} &= \frac{EG_p(L)}{EL_p(L)}, \\ \text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \text{ e } w_i \geq 0 \end{aligned}$$

Em que  $EG_p(L)$  é o *Expected Gain*,  $EL_p(L)$  é o *Expected Loss* ambos se referem ao portfólio,  $L$  é um limiar,  $w_i$  são os pesos dos ativos no portfólio  $i$  e  $n$  é o número de ativos da carteira.

### 3.2.3 Otimização Evolutiva Multiobjetivo 1 e 2

A otimização multiobjetivo consiste em várias funções objetivas sendo executadas simultaneamente a fim de maximizá-las ou minimizá-las, sujeitas a um conjunto de restrições que as soluções devem satisfazer. Para a realização dessa otimização foi utilizada a forma geral de um problema de otimização multiobjetivo conceituada por Deb (2001) e pode ser visualizada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar ou minimizar} \quad & f_m(x) \quad m = 1, \dots, N_{obj} \\ \text{sujeito a:} & \\ & g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \\ & h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, K \\ & x_{lb} \leq x \leq x_{ub} \quad i = 1, \dots, N_{var} \end{aligned}$$

Em que:

$x$  é um vetor com  $N$  variáveis de decisão

$N_{obj}$  é o número de objetivos da otimização

$g_j(x)$  são as restrições de desigualdade

$h_k(x)$  são as restrições de igualdade

$J$  e  $K$  são os números de restrições de desigualdade e igualdade

$x_{lb}$  e  $x_{ub}$  são os limites inferiores e superiores de cada variável de decisão

Sabendo não ser possível a otimização simultânea de todos os objetivos a solução utilizada para mediar essa seleção foi a utilização de Algoritmos Evolutivos (AE) que utilizam o valor das funções objetivo do problema de cada indivíduo para por meio de testes de classificação escolher quais permanecerão para as próximas interações. Os AGs atuam através da codificação de soluções candidatas para um problema através do uso de operadores genéticos, ou seja, por meio dos conceitos



da evolução de Darwin, mutação e cruzamento. No presente trabalho foram utilizados os algoritmos NSGAI, NSGAIII, IBEA e GDE3.

Baseando-se nesses conceitos a otimização multiobjetivo, utilizou como atributos centrais a maximização da medida  $\hat{\Omega}$ , a minimização do *drawdown* máximo, além da correlação condicional do VIX (CVIX). Assim como todas as otimizações presentes neste trabalho ambas também foram executadas por meio do framework Spyder baseado na linguagem de programação Python.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a avaliação dos resultados foram considerados os retornos acumulados fora da amostra das carteiras otimizadas, ou seja, *out-of-sample*, sendo essas as amostras que representam o desempenho da distribuição dos pesos dos ativos na carteira obtidos por meio das otimizações *in-sample*. Sendo assim é possível avaliar o desempenho da carteira obtida na otimização caso ela fosse implementada por um investidor na prática nos anos que compreendem o período *out-of-sample*.

Em um primeiro momento é importante assinalar que em virtude da convexidade dos portfólios otimizadas Sharpe,  $\hat{\Omega}$  eles convergirão em uma única solução e possuem um único ponto. No que diz respeito aos algoritmos evolutivos a escolha foi feita dentre as 50 melhores execuções do algoritmo, por esse motivo as carteiras não dominadas que representam mais de uma carteira e não possuem dominância entre elas também foram consideradas, portanto visando o melhor entendimento optamos por representar tudo em forma de *boxplot*.

Contextualizando a apresentação dos resultados e a análise deles, é importante destacar as 6 métricas de análise dos dados obtidos por meio das otimizações. Primeiro em função da natureza da otimização feita pelos algoritmos utilizados, ou seja, de forma multiobjetivo, não é possível comparar as soluções obtidas com base nos valores de suas funções objetivo diretamente, pois o resultado da otimização é uma fronteira de soluções ótimas.

Dessa forma se faz necessário a primeira métrica de avaliação ser o cálculo do hipervolume dos resultados apresentados pelos algoritmos empregados (NSGAI, NSGAIII, IBEA e GDE3). Essa métrica de avaliação busca avaliar a qualidade da fronteira obtida por meio da ponderação de duas características centrais: A proximidade da fronteira de Pareto Ótima e o quanto as soluções estão bem distribuídas ao longo da fronteira afim de identificar a solução que melhor cobre a fronteira, assim a primeira característica diz respeito à convergência e a segunda refere-se à diversidade.

A métrica de hipervolume foi definida por Zitzler e Thiele (1998) e pode ser obtida considerando:  $S$  como o conjunto de soluções não dominadas gerado por um algoritmo multiobjetivo,  $R$  como um ponto de referência, dominado por todas as soluções de  $S$ , e  $v_i$  o hipercubo formado a partir do espaço dominado pela solução  $S_i \in S$  tendo os valores de  $R$  como limite. Uma vez obtida a métrica baseada no hipervolume como foi explicado anteriormente, foi possível identificar o algoritmo

que apresentou o melhor conjunto de soluções ótimas. A partir da escolha do algoritmo que apresentou o melhor desempenho, foram aplicadas mais 5 métricas sendo 3 delas visando mensurar o risco associado ao portfólio formado (CVaR, Drawdown máximo e Coeficiente de variação), uma relativa ao retorno obtido na janela *out-of-sample* (Retorno acumulado) e a última mede o percentual de alocação em cada ativo escolhido pelo algoritmo evolutivo previamente escolhido pela análise da métrica de hipervolume. Ao final do cálculo das métricas escolhidas e previamente citadas foi possível a obtenção dos gráficos, separados por janela temporal e por mercado avaliado. Todas as métricas citadas foram aplicadas tanto no algoritmo eleito como o mais eficiente quanto ao índice de Sharpe e Ômega e ainda ao Index do mercado avaliado exceto a métrica de hipervolume pois em função da natureza dos índices abordados não se faz necessário, já que apresentam uma única solução.

Antes de apresentar os gráficos obtidos por meio dos conceitos citados anteriormente, é interessante contextualizar as 3 métricas de risco utilizadas para melhor compreensão das análises feitas, elas foram CVaR, Drawdown máximo e coeficiente de variação.

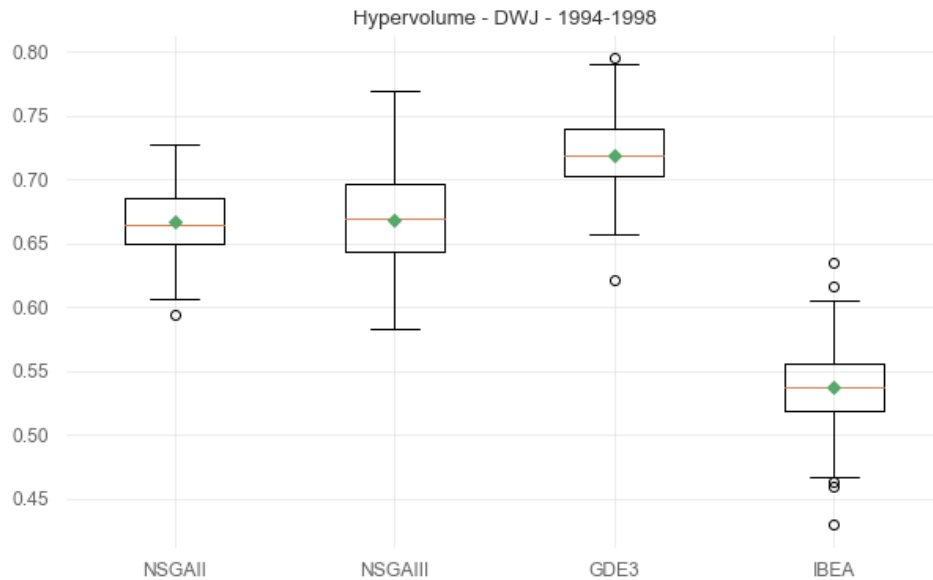
O CVaR que significa *Conditional Value at Risk* também pode ser chamado de Perda Média Esperada ou *Expected Shortfall* e tem como objetivo responder à pergunta “Qual a perda média incorrida pela carteira em x% piores cenários?” ou seja, quantifica o tamanho médio da perda nos piores cenários possíveis do portfólio, e no contexto usado na análise deste artigo irá mensurar a perda média dos piores dias do portfólio formado, possuindo assim a capacidade de detectar a presença de eventos catastróficos. Para sua utilização é preciso definir primeiramente o nível de confiabilidade empregado na métrica, por exemplo, um nível de confiança de 95% significa que o ponto de interesse das perdas potenciais foi definido para 5% dos piores cenários possíveis, sendo assim possível calcular a média das perdas potenciais associadas a esses piores cenários presentes no portfólio escolhido. O último exemplo descreve o nível de confiabilidade definido para as análises deste estudo, sendo assim o CVaR nos dirá a perda média dos 5% piores dias do portfólio que estiver sendo analisado.

Já o *drawdown* máximo é a diferença percentual entre topos e fundos, podendo assim nos indicar qual é o ponto de máxima “dor” presente no portfólio, ou seja, qual o maior estágio de perda possível presente no portfólio formado durante o período definido. Também pode ser entendido como a maior redução percentual no valor de um investimento ou portfólio, medida do seu pico anterior até o ponto mais baixo subsequente.

E por último o coeficiente de variação, que é utilizado para medir a relação risco/retorno do portfólio, ou seja, quantas unidades de risco serão adicionadas para cada unidade de retorno. Portanto é interessante sempre buscar coeficientes de variação mais baixos possíveis, já que isso indicará uma melhor relação entre essas duas variáveis. Ele pode ser obtido por meio da divisão do desvio-padrão dos retornos pelo valor esperado dos retornos.

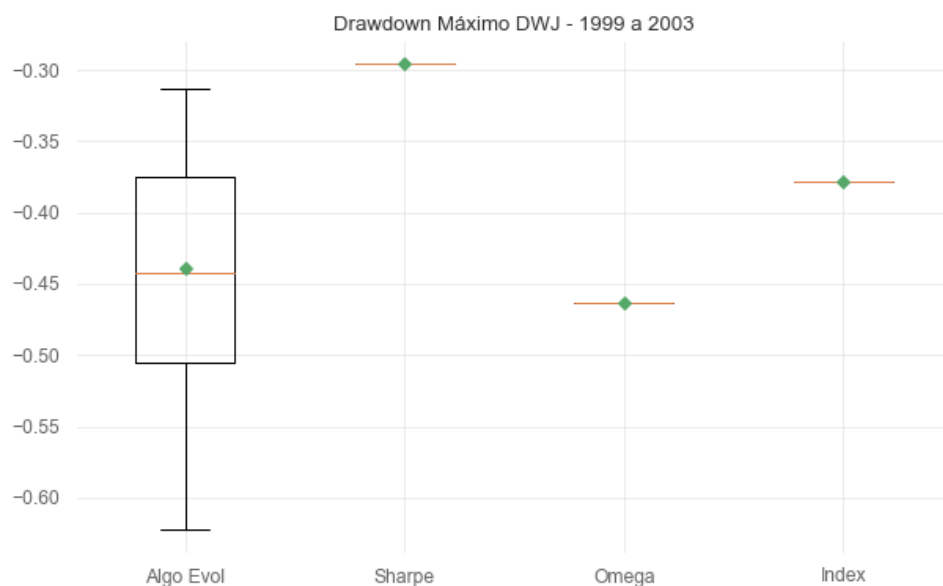
A partir daqui as análises foram apresentadas de acordo com o mercado em que foi feita a otimização, assim como sua janela temporal previamente definida.

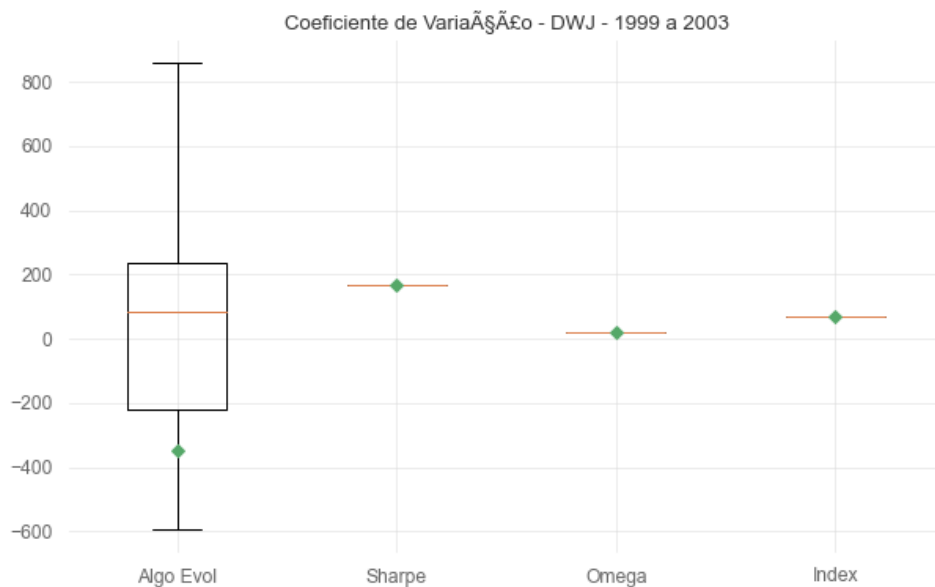
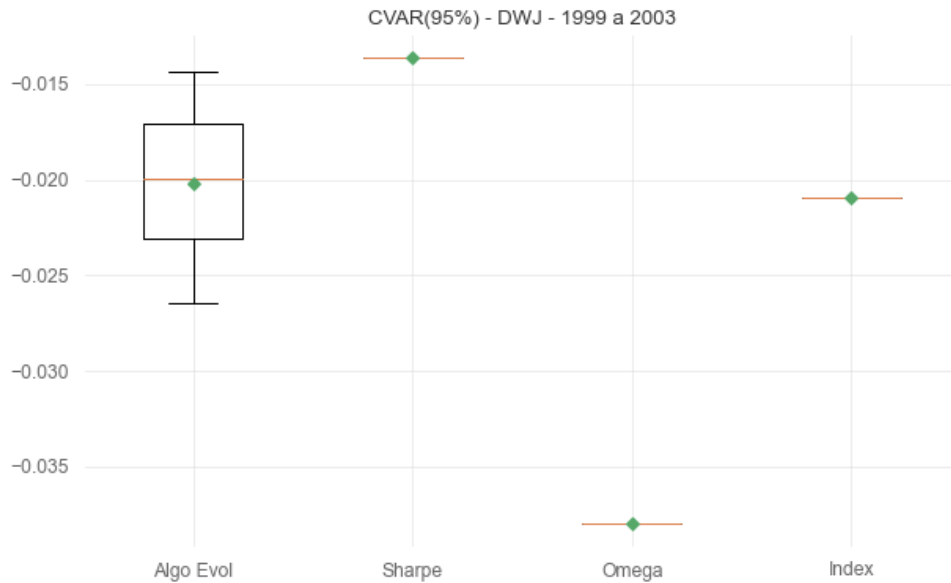
Janela 1 – Empresas Dow Jones – *Out-of-Sample* (1999-2003)



Como pode ser observado o algoritmo que apresentou o melhor desempenho baseado na métrica do hipervolume foi o GDE3, e por isso ele foi o algoritmo eleito para efetuar as comparações com Sharpe,  $\hat{\Omega}$  e o Index do mercado em questão. Portanto dentro dessa seção a legenda “Algo Evol” nos gráficos está representando o desempenho do GDE3.

Na sequência podem ser visualizados os 3 gráficos referentes às métricas de risco empregadas:



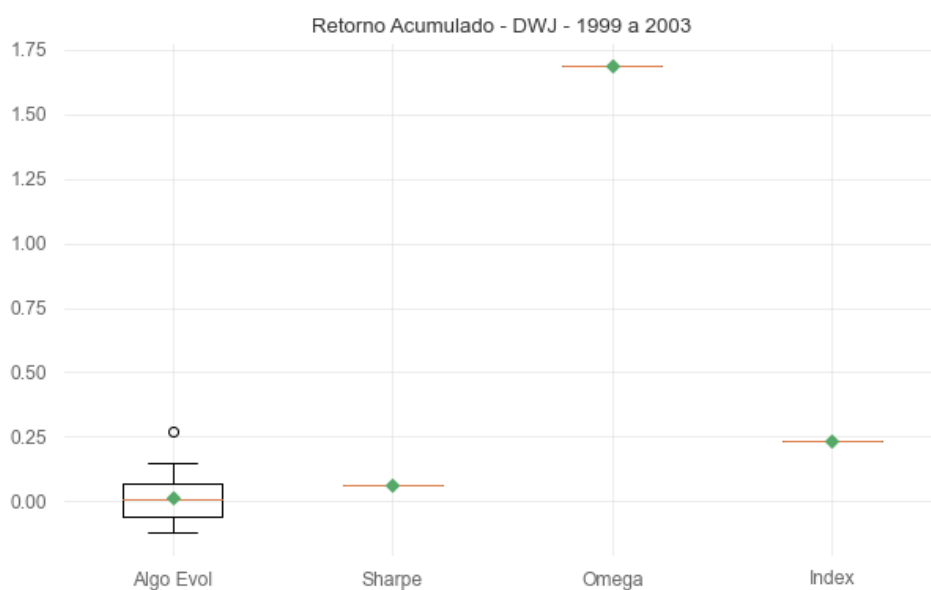


Em relação as métricas de risco na primeira janela do mercado DWJ, podemos observar que o algoritmo evolutivo juntamente com a medida  $\Omega$  apresentaram os maiores *drawdowns* máximos entre os portfólios avaliados, representando uma redução de até 45% do capital inicial ao longo do percurso. Sendo também possível perder em média 2% nos piores dias para o algoritmo.

O portfólio baseado no índice de Sharpe foi o que apresentou as melhores métricas de risco nesta janela, porém assim como o algoritmo evolutivo apresentou retorno acumulado muito próximo de 0 o que acaba por não fazer muita diferença possuir boas métricas de risco neste caso, pois se mostrou inferior até mesmo ao Index do mercado avaliado.

Além disso é interessante ressaltar que a medida  $\hat{\Omega}$  apresentou um enorme risco associado, podendo chegar a perder em média 4% nos piores dias e mais de 45% em algum momento da janela temporal, representado pelo *drawdown* e isso pode ser explicado pela baixa diversificação aplicada pela otimização feita com a medida  $\hat{\Omega}$ , onde a escolha foi por alocar 100% do capital em uma única empresa sobre a sigla UNH (UnitedHealth Group Inc).

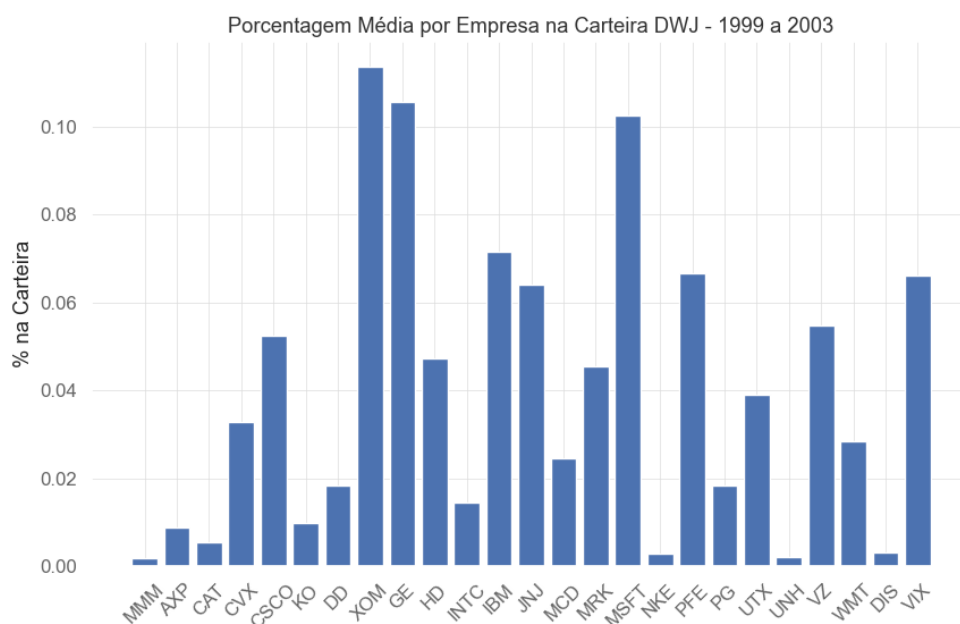
Por outro lado, o algoritmo evolutivo apesar de ter diversificado bem mais do que a medida  $\hat{\Omega}$  ele não foi capaz de mitigar os riscos associados apenas por diversificar mais, apresentando resultados relativos ao risco bem semelhantes a medida  $\hat{\Omega}$ , porém quando se trata do retorno acumulado desempenhou muito abaixo perdendo até mesmo para o Index do DWJ (Característica que somente foi observada no mercado americano, onde o Index em função da maturidade do mercado representa um opção viável de alocação, o que não acontece no mercado brasileiro, esse conceito foi trabalho melhor na janela temporal do IBOV)



Como é possível observar no gráfico acima o retorno acumulado do algoritmo evolutivo (GDE3) foi muito próximo de 0 assim como Sharpe onde ambos perdem até para o Index nessa primeira janela do mercado DWJ. Com destaque para a medida  $\hat{\Omega}$  que apresentou um retorno próximo de 175%, porém como foi citado anteriormente a otimização baseada nessa medida optou pela alocação total do capital em apenas 1 ativo. E como foi demonstrado pelas métricas de risco apresentadas, isso representa um aumento significativo no risco associado ao portfólio formado.

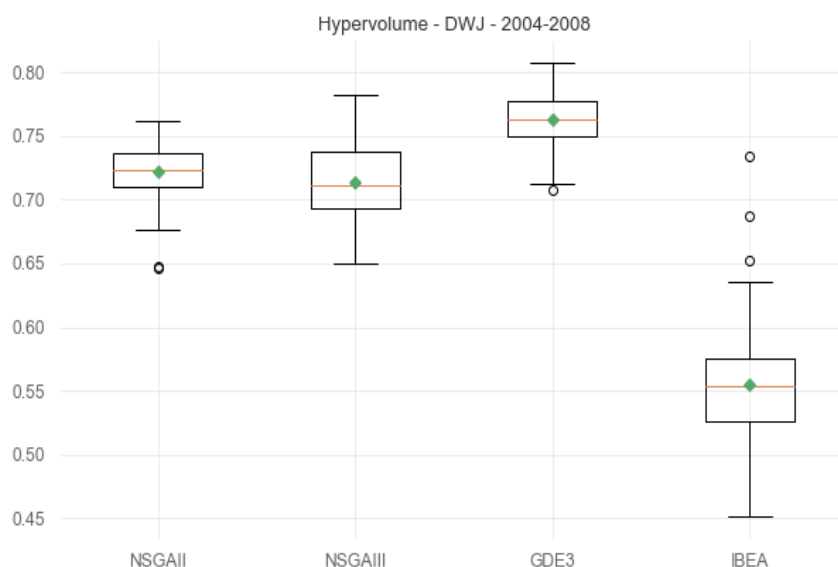
Na sequência podem ser visualizadas as escolhas feitas pelo algoritmo evolutivo eleito como melhor dentre os 4 avaliados. Os pesos de alocação do capital em cada ativo do DWJ juntamente com a alocação no VIX que é feita com base no CVIX. E apesar de o VIX não ser um ativo em si escolhemos

por fazer com que o algoritmo interpretasse tal índice como um, assim em momentos de grande volatilidade no mercado, ele pode escolher alocar um percentual do capital disponível nesse ativo imaginário, como uma forma de proteção, fazendo com que na prática o capital alocado no VIX esteja na realidade fora do mercado e protegido da variação dele. Essa lógica foi aplicada para todas as demais janelas.



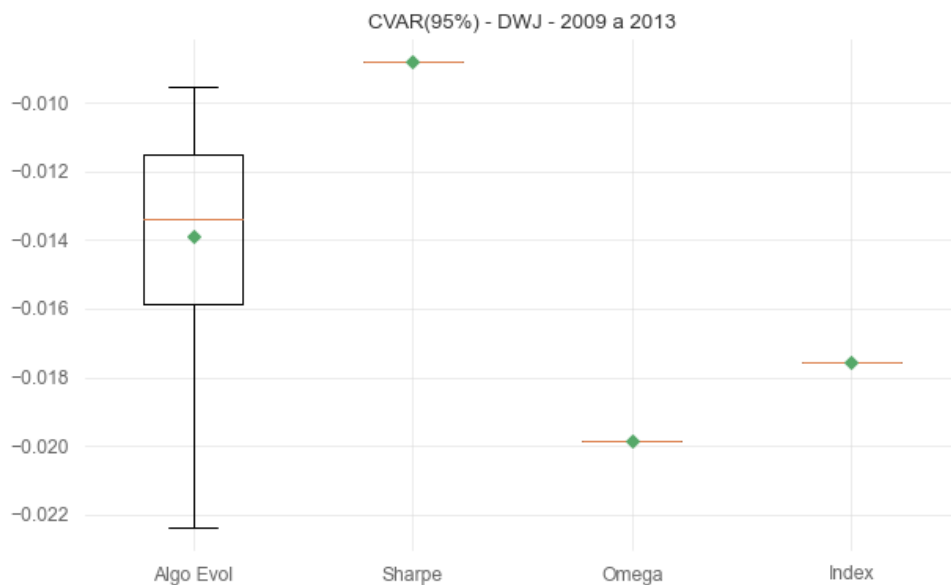
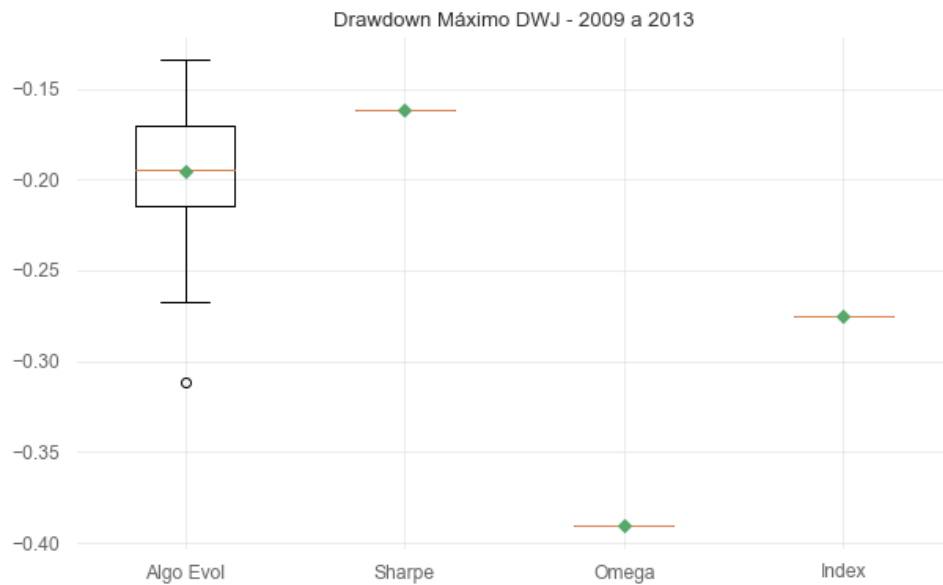
Em função do retorno próximo de 0 e abaixo até mesmo do Index do mercado, esse gráfico não possui utilidade prática em si na janela temporal 1999-2003.

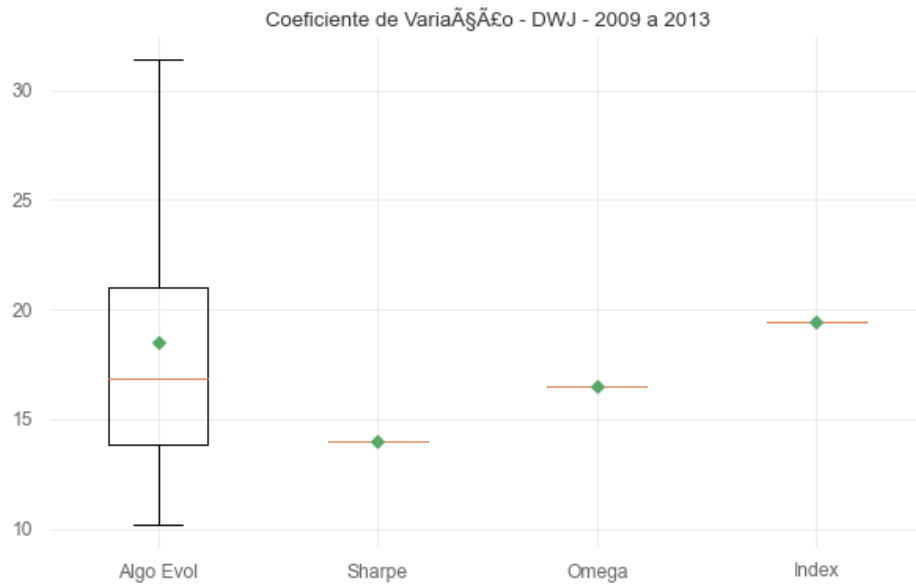
Janela 2 – Empresas Dow Jones – *Out-of-Sample* (2009 - 2013)



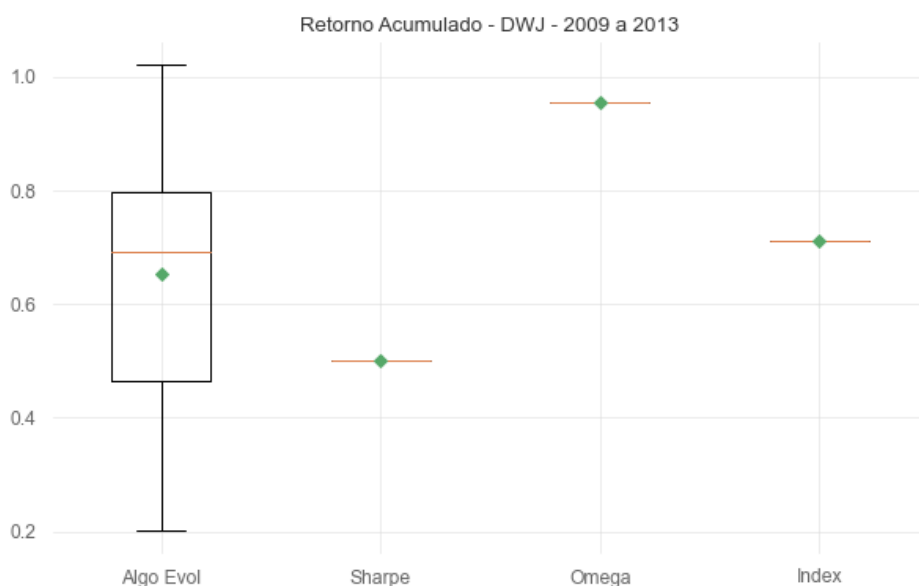
Assim como nas janelas anteriores, e nas janelas subsequentes o algoritmo vencedor dentro da métrica de hipervolume foi o GDE3 e por isso a partir daqui o gráfico de hipervolume dispensa legenda.

Métricas de risco:





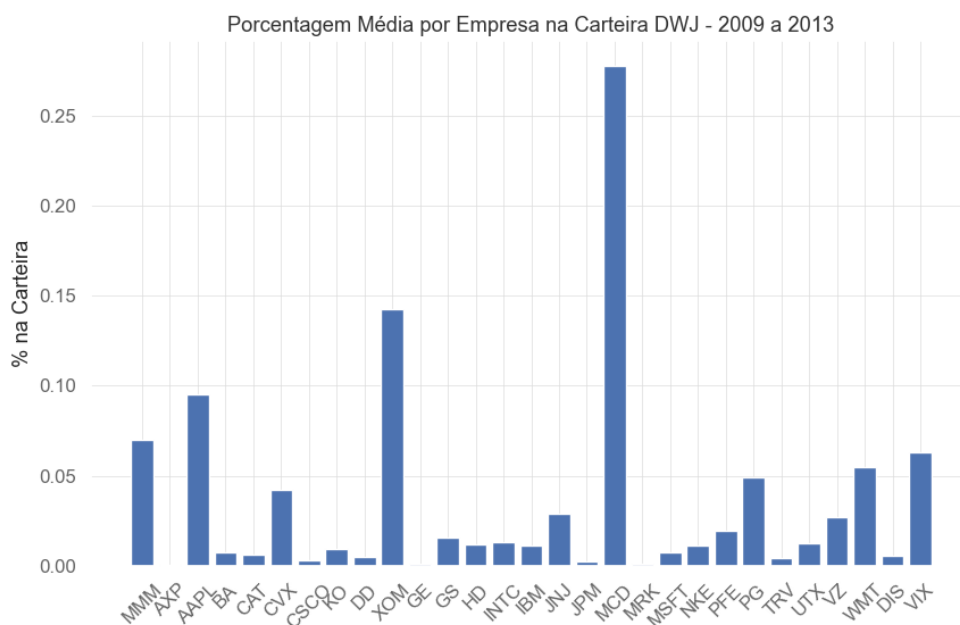
Nesta janela um certo padrão volta a se repetir, Sharpe apresenta as melhores métricas de risco, juntamente com o algoritmo evolutivo nesta janela em específico. Outra coisa que também pode ser observada e já foi discutida nas janelas anteriores e acaba sendo vista nesta janela é a otimização baseada em  $\hat{\Omega}$  apresentar as piores métricas de risco, dessa vez acompanhada do Index do mercado, mesmo sendo o Index do mercado mais maduro, o americano.



Quanto aos retornos acumulados, mais um padrão pode ser identificado,  $\hat{\Omega}$  apresenta o maior retorno de longe em comparação com as demais otimizações e em relação ao Index do mercado

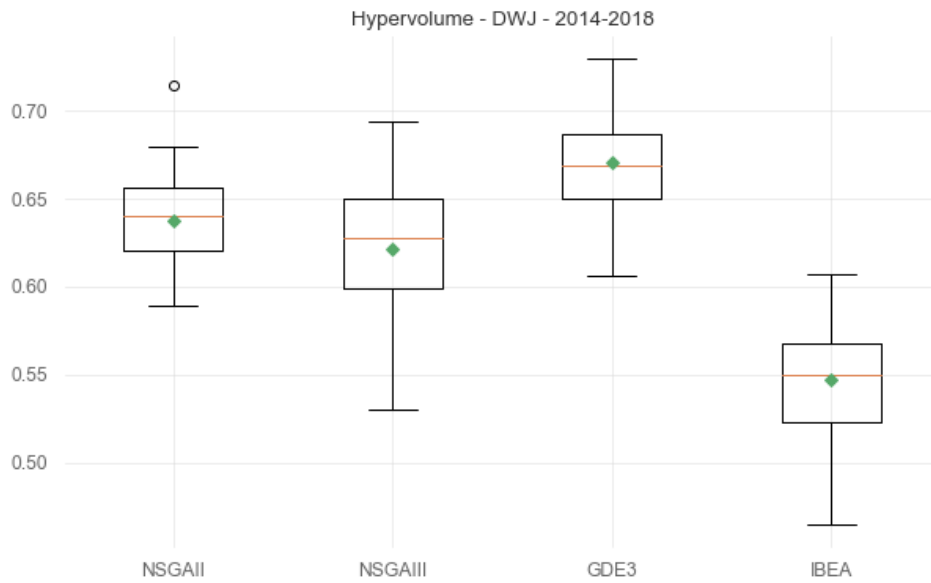


que nessa ocasião em específico obteve um retorno bem satisfatório chegando a ser superior a Sharpe e ao próprio algoritmo evolutivo. Porém assim como nas janelas anteriores o prêmio maior oferecido por  $\hat{\Omega}$  está diretamente relacionado com um aumento considerável no risco do portfólio, o que reforma a ideia de que apesar do maior rendimento torna-se mais interessante optar por Sharpe ou até mesmo nesse caso pelo algoritmo evolutivo, que apresentou lidar bem com o risco nesta janela, e foi capaz de entregar um retorno acumulado de aproximadamente 70% sendo superior até mesmo em relação a Sharpe. O desempenho de 70% do Index nessa janela temporal pode ser explicado pelo momento macroeconômico global da época, onde pós crise de 2008 os ativos em geral estavam “baratos” e conseqüentemente com a recuperação da economia nos anos subsequentes ofereceu um retorno acima do normal. Assim como nas janelas anteriores  $\hat{\Omega}$  apresenta baixa diversificação, mas dessa vez optando por alocar 9% no VIX e obtendo retornos consideráveis apesar de métricas de risco não tão interessantes. Sharpe além de mais diversificado escolheu também por alocar cerca de 10,5% do capital no VIX.

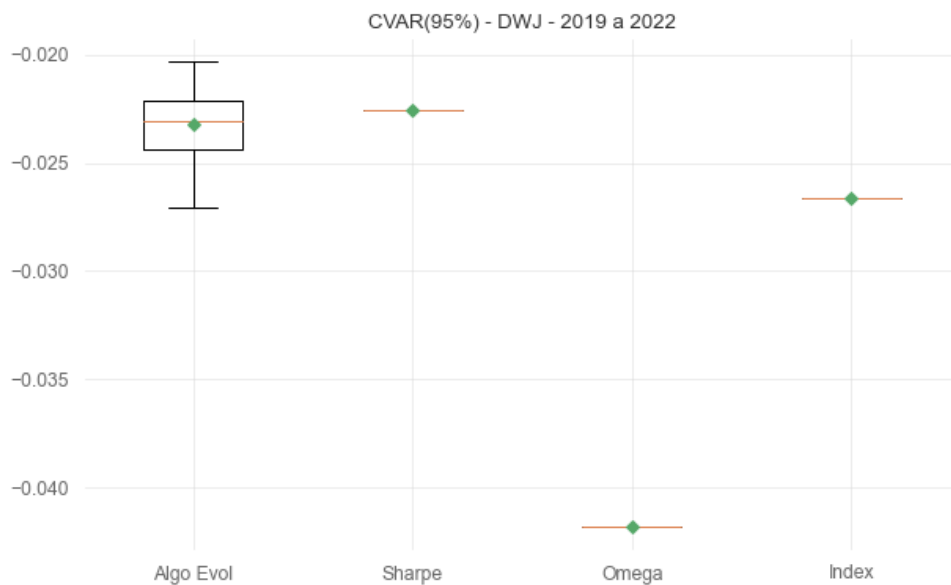


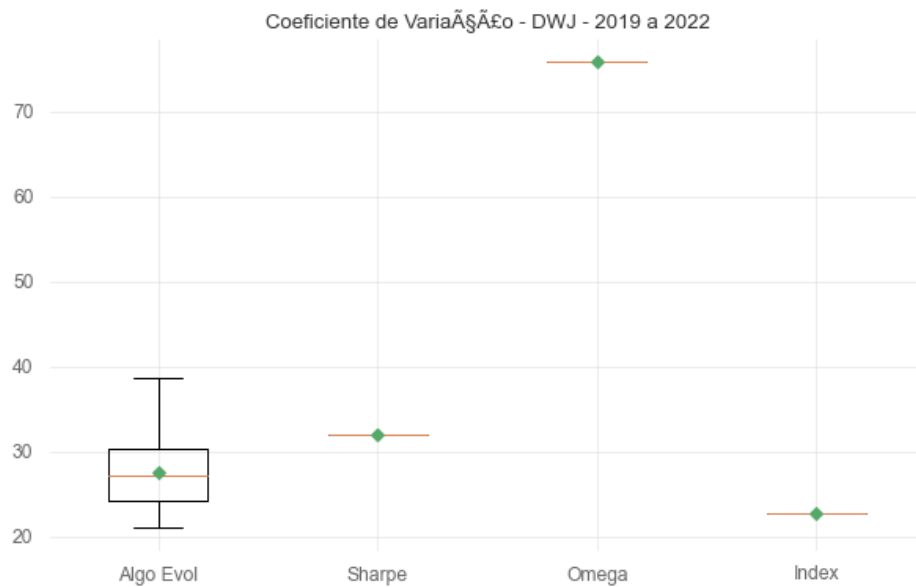
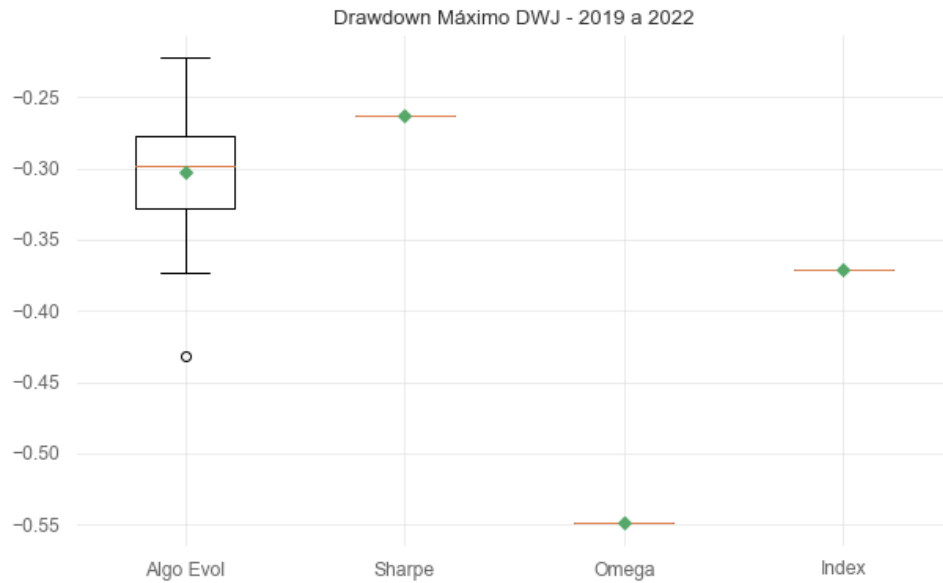
As escolhas feitas pelo algoritmo evolutivo estão representadas acima, interessante destacar a alocação de mais de 5% no capital, também, no VIX.

Janela 3 – Empresas Dow Jones – Out-of-Sample (2019 - 2022)

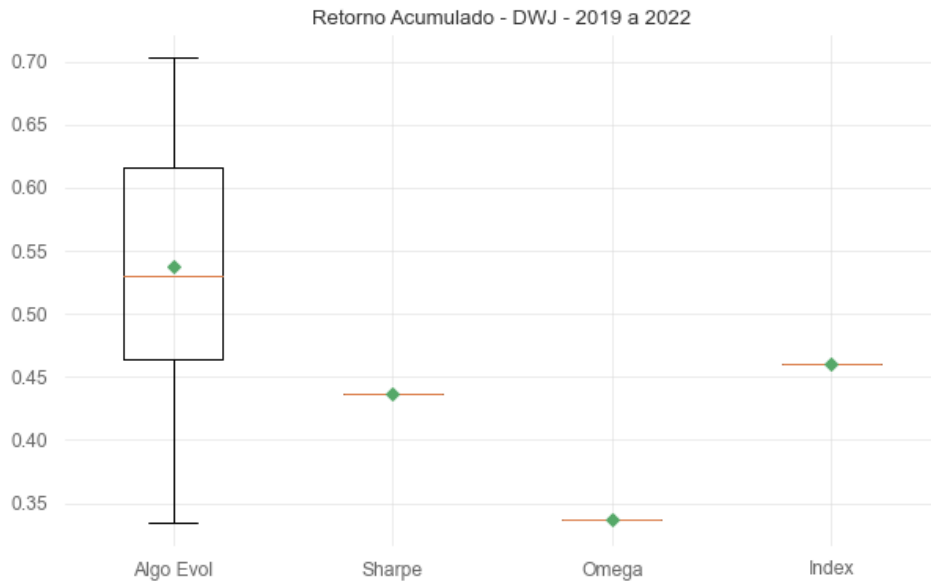


Métricas de risco:

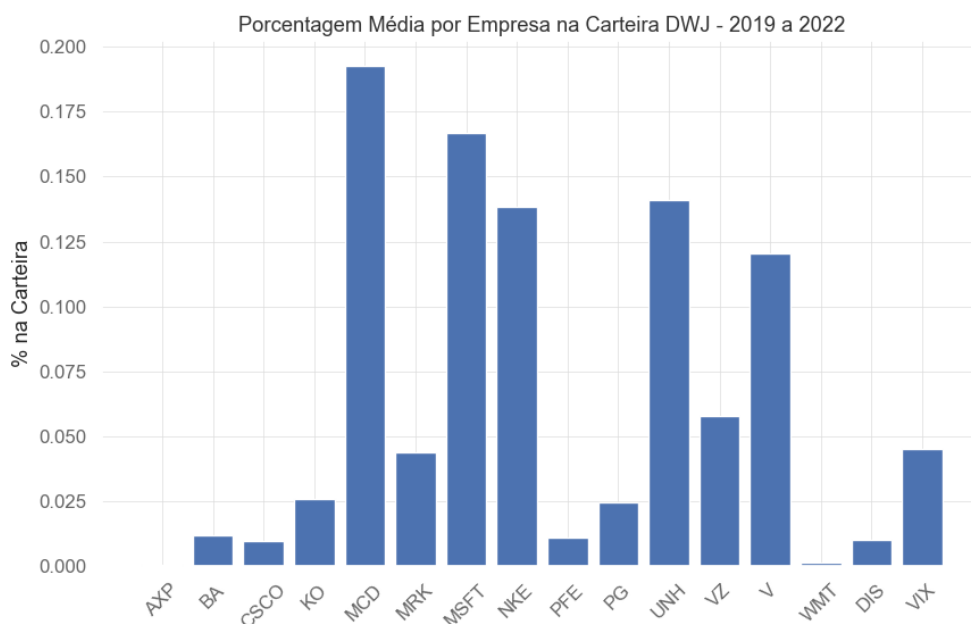




Na última janela do mercado americano os resultados não divergem das análises feitas nas duas outras anteriores, mais uma vez a otimização feita por Ómega apresentam as piores métricas de risco, com o Index tendo nos mostrado um desempenho bom quanto as métricas de risco seguindo o mesmo padrão do Index desempenhar bem no mercado mais maduro do DWJ. Sharpe continua sendo o vencedor em termos de relação risco retorno, seguido pelo algoritmo evolutivo. Fazendo com que mais uma vez a escolha racional do investidor se concentre na escolha entre esses dois portfólios.



Nesta janela fica evidente o risco associado com a escolha pela baixa diversificação feita pelo índice Ômega, que dessa vez apresentou retorno acumulado inferior até mesmo ao Index do mercado americano. Com destaque para o algoritmo evolutivo que apresentou o melhor retorno acumulado aliado ao bom desempenho em relação as métricas de risco ganhando consideravelmente em retorno acumulado até do índice de Sharpe, que vinha até então apresentando retornos relativamente melhores em relação ao risco associado. Ômega optou por alocar 86% do capital em somente uma empresa (GE) seguido por 7% na IBM e 6% no VIX e mesmo assim apresentou retornos acumulados inferiores ao índice, indicando alta exposição ao risco e baixo retorno acumulado ao contrário de Sharpe que novamente apresentou alta diversificação com 7% de alocação no VIX. As escolhas feitas pelo algoritmo evolutivo podem ser vistas a seguir:



É relevante destacar que quanto maior é a diversificação não somente em relação a quantidade de ativos, mas quanto a diferentes setores da economia que essas empresas escolhidas atuam menor é o coeficiente de variação. O que explica os altos coeficientes apresentados pela medida  $\hat{\Omega}$ . Também importante pontuar que em todas as otimizações feitas pelo algoritmo evolutivo houve parte do capital alocado dentro do VIX.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo, primeiramente realizar otimizações com atributos puramente convexos de forma mono-objetiva para posteriormente efetuar a comparação dos retornos esperados dos ativos fora da amostra dessas otimizações com os resultados provenientes das otimizações feitas de forma multiobjetivo com atributos não-convexos com destaque para o CVIX e o *drawdown* máximo. Para que assim seja possível por meio da avaliação dos resultados saber se as carteiras formadas superam as carteiras teóricas de mercado sugeridas pelo modelo CAPM. As otimizações multiobjetivo mediadas por algoritmos evolutivos nos mostraram um desempenho melhor que as carteiras Sharpe e  $\hat{\Omega}$  com maiores retornos fora da amostra, além de melhor relação média-variância. Os resultados então, nos confirmaram que a utilização apenas da média e variância na construção de portfólios otimizados não devem ser os únicos atributos a serem considerados, em especial esse trabalho demonstra que a adição de um atributo antifrágil assim como o *drawdown* máximo nos modelos de otimização de carteiras pode potencialmente aumentar o desempenho da carteira formada.



## REFERÊNCIAS

- ASSAF NETO, A. Finanças corporativas e valor. São Paulo: Atlas, 2003.
- BHARDWAJ, D. Markowitz: Theory: Subject Matter, Assumptions and Models. Novembro de 2016.
- CHANG, T.; MEADE, N.; BEASLEY, JE.; SHARAIHA, YM. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271-1302, 2000.
- CHEN, S. N.; LEE, Cheng F. The sampling relationship between Sharpe's performance measure and its risk proxy: Sample size, investment horizon and market conditions. *Management Science*, vol. 27, n. 6, pp. 607-618, June 1981.
- DEB, K.; AGRAWAL, S.; PRATAP, A.; MEYARIVAN, T. A fast elitist nondominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. In: *International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*, pp. 849–858 (2000). Springer.
- DEB, K.; JAIN, H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, 18(4), 577–601 (2014).
- DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197 (2002).
- DOERNER, K.; GUTJAHR, W.J.; HARTL, R.; STRAUSS, C.; STUMMER, C. *Pareto Ant Colony Optimization: A Metaheuristic Approach to Multiobjective Portfolio Selection*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- DOERNER, K.F.; GUTJAHR, W.J.; HARTL, R.F.; STRAUSS, C.; STUMMER, C. Pareto ant colony optimization with ILP preprocessing in multiobjective project portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, 171(3), 830-841, 2006.
- HANAOKA, G. P. *Seleção de Carteiras de Investimentos Através da Otimização de Modelos Restritos Multiobjetivos Utilizando Algoritmos Evolutivos*. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional, CEFETMG, Belo Horizonte, 2014
- KEATING, C.; SHADWICK, W.F. A universal performance measure. *Journal of Performance Measurement*, 6(3), 59–84 (2002).
- LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 1965.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91, 1952.
- MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. Cowles Foundation Monograph, n. 16. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- MARKOWITZ, HM. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. 2nd ed., MA: Basil Blackwell, 1991.
- PETUKHINA, Alla; KLOCHKOV, Yegor; KARL, Wolfgang; ZHIVOTOVSKIY, Nikita. Robustifying Markowitz. *Journal of Econometrics*, *Journal of Econometrics*, ano 2023, p. 4559-4566.



SHARPE, W.F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 1964.

SILVA, S. Precificação de ativos com risco no mercado acionário brasileiro: aplicação do modelo CAPM e variantes. 144p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2007.

SILVEIRA, H.P.; BARROS, L.A.B.C.; FAMÁ, R. Conceito de taxa livre de risco e sua aplicação no capital asset pricing model– um estudo exploratório para o mercado brasileiro. In: Encontro Brasileiro de Finanças, 2., 2002, Rio de Janeiro. Anais... São Paulo: SBFIN, 2002.

TOBIN, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.

VASCONCELOS, G.F.R., et al. Precificação de ativos sob qualquer distribuição de retornos: a derivação e aplicação do ômega capital asset pricing model (ocapm), 2013.

ASSAF NETO, A. Mercado Financeiro. 1. ed. São Paulo: Atlas, 1999.