Um olhar na composição de transformações lineares na linguagem das matrizes, alguns tipos de matrizes de ordem 2 representadas geometricamente no plano R2

https://doi.org/10.56238/sevened2024.001-064

Cícero José da Silva
Mestre em matemática
UPE -Poli (Universidade de Pernambuco - Escola Politécnica de Pernambuco)
E-mail: cjs@poli.br

Willames de Albuquerque Soares
Dr.
UPE-Poli (Universidade de Pernambuco - Escola Politécnica de Pernambuco)
E-mail: was@poli.br

Sérgio Mário Lins Galdino
Dr.
UPE-Poli (Universidade de Pernambuco - Escola Politécnica de Pernambuco).
E-mail: galdino@poli.br

Jornandes Dias da Silva
Dr.
UPE-Poli (Universidade de Pernambuco - Escola Politécnica de Pernambuco)
E-mail: Jornandes@poli.br

Juan Carlos Oliveira de Medeiros
Mestre em matemática
UFC- Universidade Federal do Ceará
E-mail: juca@ufc.br

RESUMO

O objetivo desta nota é apresentar composições de transformações lineares na linguagem das matrizes; bem como, apresentar interpretações geométricas para alguns casos particulares de matrizes de ordem 2 como reflexões em torno dos eixos x ey, reflexões em torno da origem, contração, expansão ou homotetia, cisalhamento horizontal e vertical, rotação anti-horária, projeção ortogonal de $u = (x, y)$ sobre a reta$G : y = ax, a /= 0$; bem como a reflexão do mesmo vetor em torno desta mesma reta.
G. Vale ressaltar que suas composições na linguagem das matrizes é um primeiro modelo de computação gráfica. Ilustrativamente, por exemplo, a expansão de fator $k : H_k (x, y) = (kx, ky)$ ou na linguagem das matrizes, representa um zoom do computador ampliando se $k > 1$ ou contraindo se $0 < k < 1$.

Palavras-chave: Formação de Professores, Tecnologia Educacional, Inteligência Artificial, Alfabetização Digital.

1 INTRODUÇÃO

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA EM TORNO DO NOMEMATRIZ

O pai do nome matriz Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e sairam da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar umnome parece ter sido Cauchy, 1826 : tableau (tabela). O nome matriz só veio com JamesJoseph Sylvester, 1850. Seu amigo Cayley, com sua famosa Memoir on the Theoryof Matrices, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Por que Sylvester deu o nome matriz às matrizes ? Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangularde termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar varios sistemas de determinantes, ao fixar um número p eescolhar à vontade p linhas e p colunas..."artigo publicado na Philosophical Magazinede 1850, pag 363— 370). Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

1.2 SURGIMENTO DOS PRIMEIROS RESULTADOS DA TEORIA DAS MATRIZES

Costuma-se dizer que num curso mais avançado curso de Teoria das Matrizes ou de sua versão mais abstrata, a Álgebra Linear - deve ir no mínimo até o Teorema Espectral. Pois bem, esse teorema e toda uma série de resultados auxiliares já eram conhecidos antes deCayley iniciar a estudar as matrizes como uma classe notável de objetos matemáticos. Comose explica isso? Esses resultados, bem como a maioria dos resultados básicos da Teoria da Matrizes, foram descobertos quando os matemáticos dos séculos XV III e XIX passaram a investigar a Teoria das Formas Quadráticas. Hoje, consideramos imprescindível estudar essas formas através da notacão e metodologia matricial, mas naquela época elas eram tratadas escalarmente. Mostremos aqui a representação de uma forma quadrática de duasvariáveis, tanto via notação escalar como com a mais moderna notação matricial:

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + sy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^tAX,$$

$$\text{onde: } X^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & s \end{pmatrix}\ A^t = A \text{ (matriz simétrica)}$$

O primeiro uso implícito da noção de matriz ocorreu quando Lagrange 1790 reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo dosinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função. Sempretrabalhando escalarmente, ele chegou à uma conclusão que hoje expressamos em termos de matriz positiva definida. Após Lagrange, já no século XIX, a Teoria das Formas Quadráticas chegou a ser um dos assuntos mais importantes em termos de pesquisas, principalmente no que toca ao estudo de seus invariantes. Essas investigações tiveram comosubproduto a descoberta de uma grande quantidade de resultados e conceitos básicos de matrizes. Assim, podemos dizer que a Teoria das Matrizes teve como mãe a Teoria das Formas Quadráticas, pois que seus métodos e resultados básicos foram lá gerados. Hoje, contudo, o estudo das formas quadráticas é um mero capítulo da Teoria das Matrizes. Observemos, ademais, que os determinantes em nada contribuiram para o desenvolvimentoda Teoria das Matrizes.

1.3 COMPOSIÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição: Sejam U e B espaços vetoriais sobre R e sejam $T : U \to B$ e $G : B \to W$ transformações lineares. A composta $G \circ T : U \to W$, é dada por:

$$(G \circ T)(u) = G[T(u)],\ 6u \in U.$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "G \circ T"'] & B \arrow[d, "MG"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Para a composta $G \circ T$ tem-se: a imagem de T está contida ou é igual ao domíniode G :

$$Fm(T) \subseteq D(G).$$

Analogamente, temos:

Para existir a composta $T \circ G$ só faz sentido quando: a imagem de G está contida ou éigual ao domínio de G :

$$Fm(G) \subseteq D(T).$$

A seguir, o teorema que caracteriza que compostas de transformações lineares tambémsão lineares.

Teorema : Sejam $T \in 5(U;B)$ e $G \in 5(B;W)$, então, $G \circ T : U \to W$, $G \circ T \in 5(U;W)$ é linear.

1.3.1 Observação:

$5(U;B)$ é o espaço de todas as transformações lineares de U em B.

$5\quad(B;W)$ é o espaço de todas as transformações lineares de B em W.

1.3.2 Demonstração

Sejam G e T transformações lineares, então, queremos mostrar que:

$$G \circ T : U \to W$$

é linear.

De fato,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "G \circ T"'] & B \arrow[d, "G"] \\ & W \end{tikzcd}$$

(i) $6u_1, u_2 \in U$, tem-se:

$$\begin{aligned} (G \circ T)(u_1 + u_2) &= G\,[T\,(u_1 + u_2)] = G\,[T\,(u_1) + T(u_2)] \\ &= G\,[T(u_1)] + G\,[T(u_2] \\ &= (G \circ T)(u_1) + (G \circ T)(u_2)\,. \end{aligned}$$

(ii) $6\lambda \in R$, $6u_1 \in U$, obtem-se:

$$\begin{aligned} (G \circ T)(\lambda u_1) &= G\,[T\,(\lambda u_1)] = G\,[\lambda T\, u_1)] = \lambda G\,[T\,(u_1)] \\ &= \lambda\,(G \circ T)(u_1)\,. \end{aligned}$$

Logo, $G \circ T : U \to W$ é linear.

1.3.3 Exemplos:

1. Sejam $T : R^3 \to R^2$ e $G : R^2 \to R^3$ transformações lineares definidas por:

(i) $T\,(x, y, x) = (x + y, x + 2x)$ (ii) $G\,(x, y) = (x + y, 2y, x - y)$

Pede-se: (i) $G \circ T$ (ii) $T \circ G$

1.3.4 Soluçăo

(i) $G \circ T$

$$\begin{array}{ccc} R^3 & \xrightarrow{T} & R^2 \\ G \circ T & \searrow & MG \\ & & R^3. \end{array}$$

Antes de passarmos a operacionalizar, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam; não as letras utilizadas, vejamos:

G nos diz que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, é a primeiracoordenada da imagem, o dobra da segunda coordenada do domínio é a segunda coordenadada imagem, e finalmente, a diferenaça das duas coordenadas do domínio é a terceira da imagem. Simbolicamente, temos:

$$G(A, Q) = (A + Q, 2Q, A - Q)$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$\begin{aligned} (G \circ T)(x, y, x) &= G[T(x, y, x)] \\ &= G(x + y, x + 2x) \\ &= (x + y + (x + 2x), 2(x + 2x), x + y - (x + 2x)) \\ &= (2x + y + 2x, 2x + 4x, y - 2x). \end{aligned}$$

Uma forma bastante interessante, e usualmente não aparece nos textos em geral, é fazera composição utilizando forma matricial na base canônica por simplicidade

$$[G \circ T] = [G].[T]$$

Construindo as matrizes correspondentes [G] e [T], obtemos:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Daí, multiplicando (1) e (2), segue-se que:

$$[G \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a forma matricial $G \circ T$ na base canônica, obtemos:

$$(G \circ T) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

Procedendo de forma análoga, vem:

$$\text{(i)} \quad T(x, y, x) = (x + y, x + 2x) \qquad \text{(ii)} \quad G(x, y) = (x + y, 2y, x - y)$$

(ii) $T \circ G$

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "T \circ G"'] & R^3 \arrow[d, "T"] \\ & R^2. \end{tikzcd}$$

Um comentário breve, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam;não as letras utilizadas, vejamos:

T nos diz: que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, na primeira coordenada da imagem, a primeira coordenado do domínio com o dobra da terceira é a segunda coordenada da imagem. Em símbolo, tem-se:

$$T(\omega, A, Q) = (\omega + A, \omega + 2Q).$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$
\begin{aligned}
(T \circ G)(x, y) &= T\,[G(x, y)] \\
&= T\,(x + y, 2y, x - y) \\
&= (x + y + 2y, x + y + 2\,(x - y)) \\
&= (x + 3y, 3x - y)\,.
\end{aligned}
$$

Vale ressaltar que: usualmente não aparece nos textos em geral, a composição utilizando forma matricial na base canônica

$$[T \circ G] = [T]\,.\,[G]\,.$$

Construindo as matrizes correspondentes [G] e [T], obtemos:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, vem:

$$[T \circ G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo na forma matricial na base canônica, obtemos:

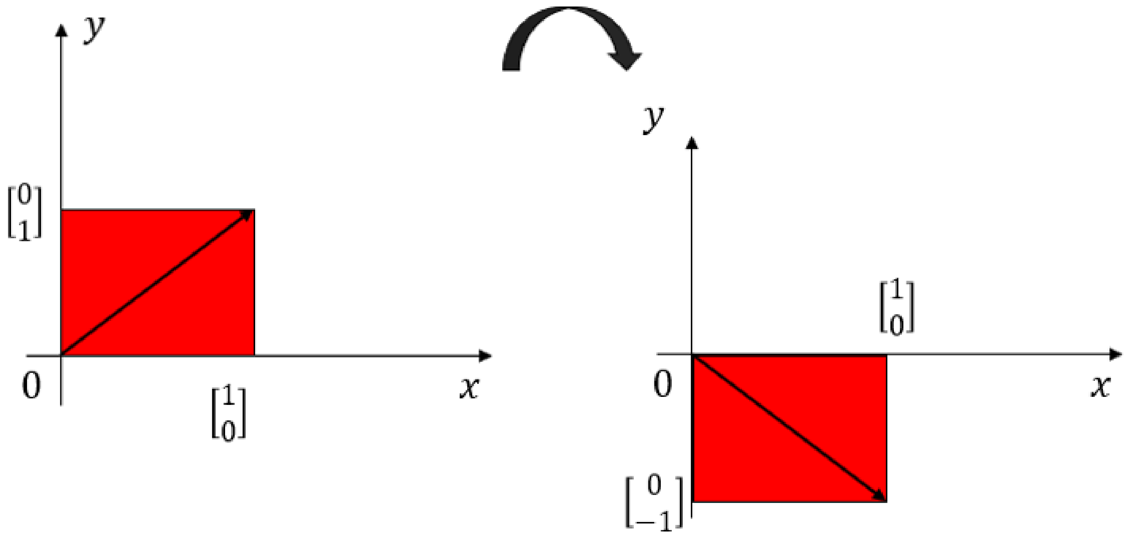
$$(G \circ T)\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$$

2 TRANSFORMAÇÃO DO PLANO NO PLANO

2.1 REFLEXĂO EM TORNO DO EIXO X :

$$R_x : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow R_x(x, y) = (x, -y)$$

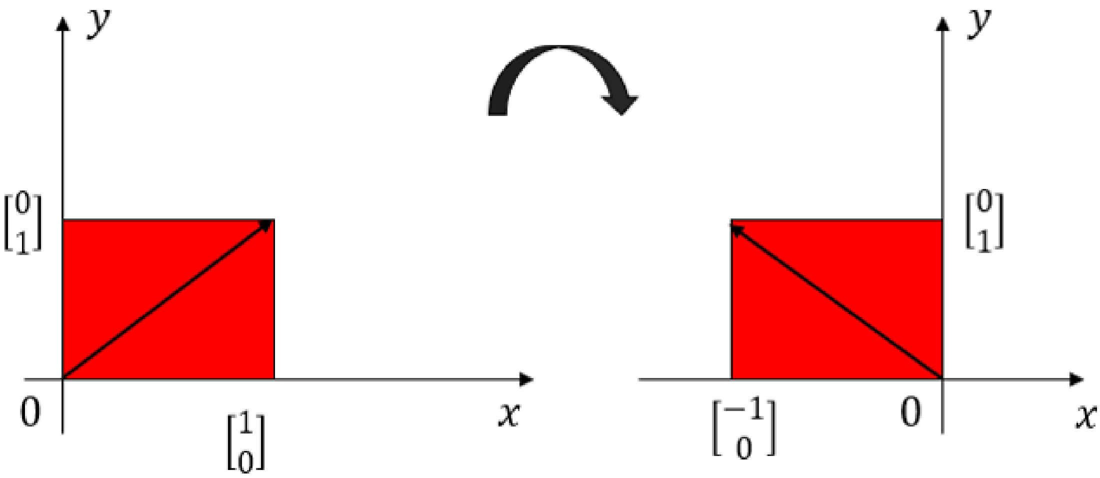


Na linguagem das matrizes, a reflexăo em torno do eixo x, descrito na forma matricial,temos:

Reflexăo em torno do eixo y :

$$R_y : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow R_x(x, y) = (-x, y)$$



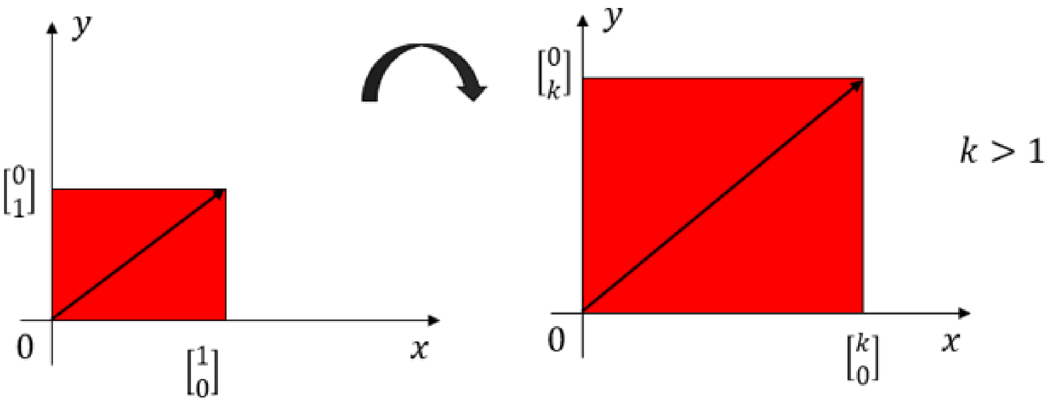
Na linguagem das matrizes, a reflexão em torno da origem, será dada por:

$$R_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Homotetia, Contração ou Expansão

$$H_k : R^2 \longrightarrow R^2$$

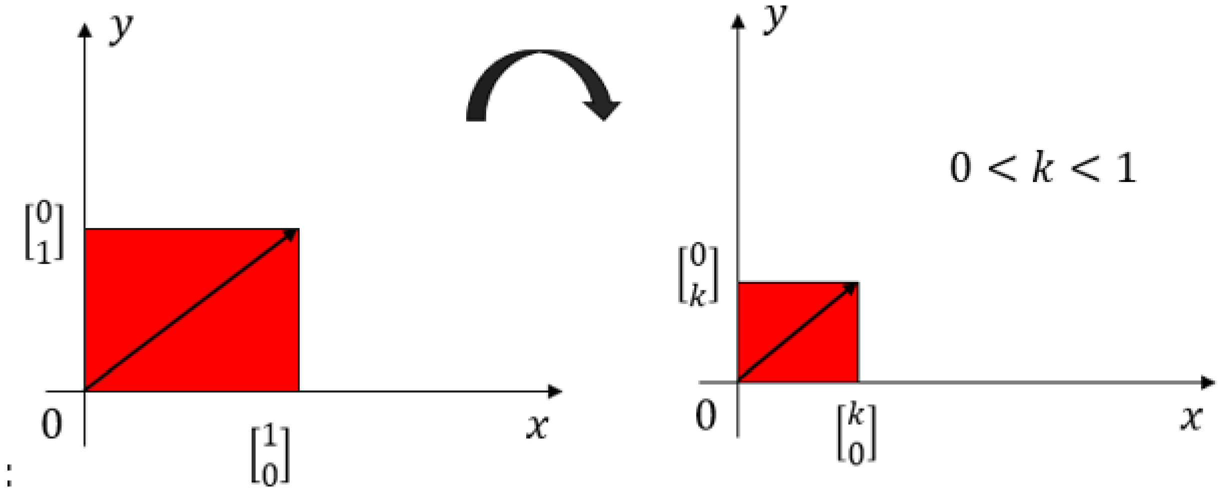
$$(x, y) \longrightarrow H_k\,(x, y) = (hx, hy)$$



Na linguagem das matrizes, Homotetia, Contração ou Expansão, é dada por:

x h 0 x
k 0 h

2.2 DE FORMA INTEIRAMENTE ANÁLOGA, HOMOTETIA, CONTRAÇÃO OU EXPANSÃO, PARA 0 < H < 1,TEM-SE



:

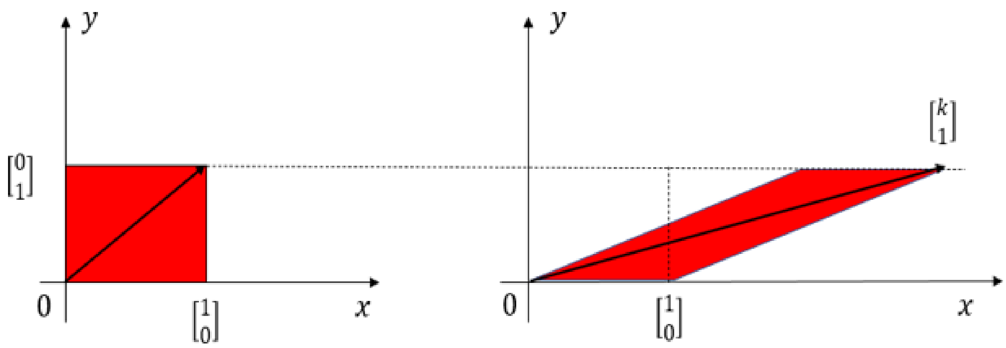
Na linguagem das matrizes, Homotetia, Contração ou Expansão, é dada por:

x h 0 x
k 0 h

Cisalhamento horizontal de fator h :

$$C_k : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow C_k(x, y) = (x + hy, y)$$



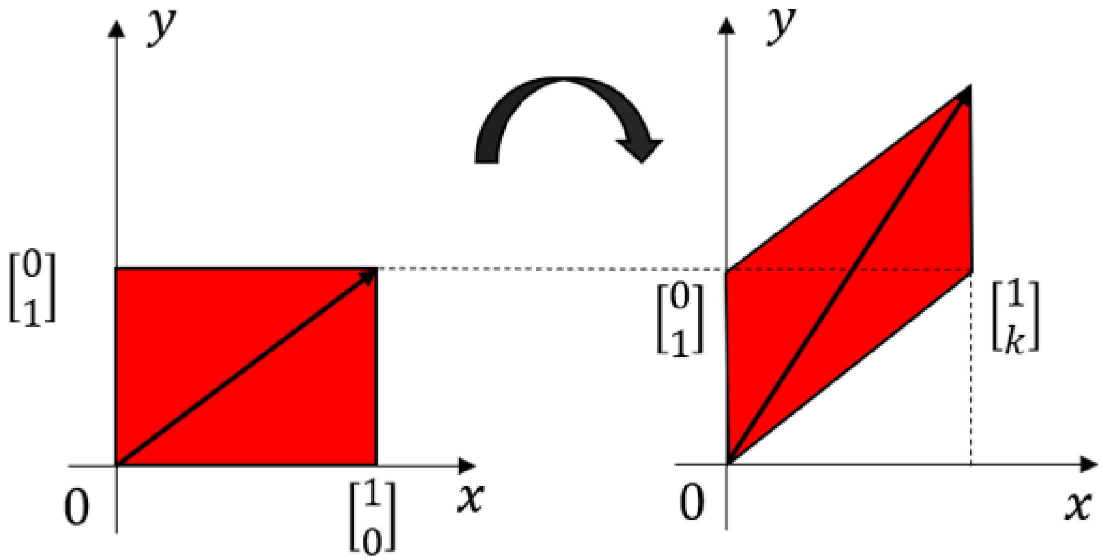
Na linguagem das matrizes, o cisalhamento horizontal será dada por:

$$k \quad x \quad \begin{matrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad x$$

Cisalhamento vertical de fator h :

$$C_k : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow C_k\,(x, y) = (x, hx + y)$$



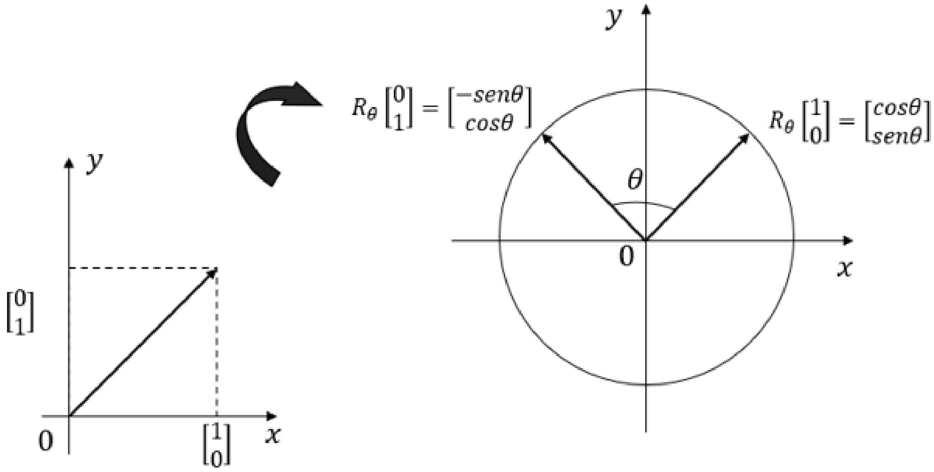
Na linguagem das matrizes, o cisalhamento vertical de fator h, será delineado por:

$$k \quad x \quad \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \quad x$$

Rotação Anti-hoirária de um ângulo θ :

$$R_8 : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow R_8 (x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$



Na linguagem das matrizes, a rotação anti-horária de um ângulo θ, é dada por:

_ x cos θ — sin θ , , x ,

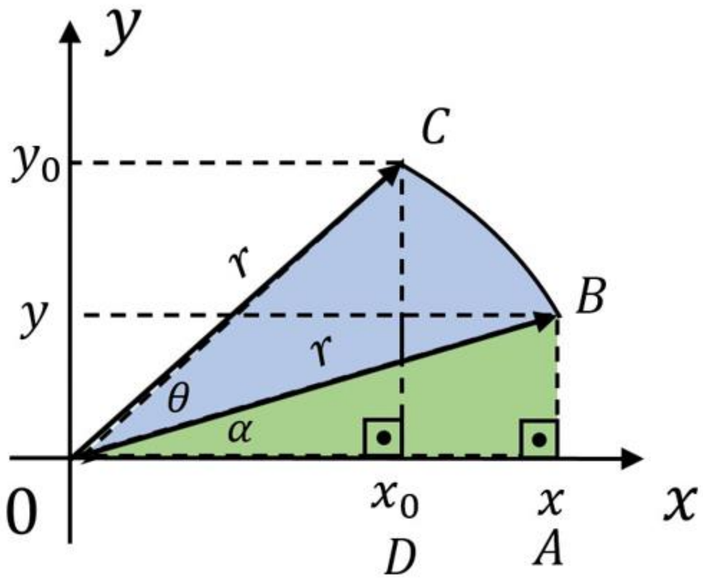
8 , y , , sin θ cos θ , , ,

Observação:

Rotação Anti-hoirária de um ângulo θ :

$$R_8 : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x, y) \longrightarrow R_8 (x, y) = (x_0, y_0)$$



Observe que:

ΔOAB :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (1)$$

ΔOAB :

$$\begin{cases} x_0 = r\cos(\ \ + \theta) \\ y_0 = r\sin(\ \ + \theta) \end{cases} \qquad (2)$$

$$\cos(\ \ + \theta) = \cos\ \ \cos\theta - \sin\ \ \sin\theta$$

Daí, usando as identidades

$$\sin(\ \ + \theta) = \sin\ \ \cos\theta + \sin\theta\cos$$

$$x_0 = r\cos(\ \ + \theta) = r\cos\ \ \cos\theta - r\sin\ \ \sin\theta \qquad (3)$$

e

$$y_0 = r\sin(\ \ + \theta) = r\sin\ \ \cos\theta + r\sin\theta\cos \qquad (4)$$

Agora, substituindo (1) em (3), (4), obtemos:

$$x_0 = r\cos(\ \ + \theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

e

$$y_0 = r\sin(\ \ + \theta) = y\cos\theta + x\sin\theta.$$

Portanto,

$$R_8(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Ou reescrevendo na forma matricial a rotação anti-horária, temos:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se a rotação fora horária, basta trocar θ por (—θ), destacando que

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

A matriz da rotação horária será dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2.2.1 Teorema

Sejam U e B.espaços vetoriais sobre R e seja $T : U \to B$ uma transformação linear. T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0\}$

$$U \xrightarrow{T} B \text{ é injetora} \Longleftrightarrow Ker(T) = \{0\}$$

Demonstração:

1ª Parte: Queremos mostrar que:

$u_O \in Ker(T)$ e T é injetora, então, $u_O = 0$

($\Longrightarrow$) De fato, $u_O \in Ker(T)$, então, $T(u_O) = 0 = T(0)$.

Agora, como T é injetora, segue-se que: $u_O = 0$.

Logo,

$$Ker(T) = \{0\}.$$

2.2.1.1 2ª Parte:

Reciprocamente, queremos provar que:

($\Longleftarrow$) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ e para todo $u_1, u_2 \in U : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$, ou seja, T éinjetora. Vejamos

$$
\begin{aligned}
T(u_1) = T(u_2) &\Longrightarrow T(u_1) - T(u_2) = 0 \\
&\Longrightarrow T(u_1 - u_2) = 0 \\
&\Longrightarrow (u_1 - u_2) \in \mathrm{Ker}(T) = \{0\} \\
&\Longrightarrow u_1 - u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.
\end{aligned}
$$

De sorte que: T é injetora.

Observação:

$$U \xrightarrow{T} B \text{ é injetora} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$$

Este teorema é valido em dimensão infinita, uma vez que em momento algum, se fazuso da dimensão em sua demonstração.

2.2.2 Exemplo1:

Prove que: $C([0,1])$ é isomorfo a $C([2,3])$, isto é, $C([0,1]) \simeq C[2,3]$.

Vale destacar que:

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ uma função contínua}\}.$$

Prova:

Com efeito, $2 \leq x \leq 3 \Longleftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 1$, então podemos tomar

$$
\begin{aligned}
T : \quad C([0,1]) &\to \quad C[2,3] \\
f &\longmapsto \quad T(f)(x) = f(x-2).
\end{aligned}
$$

É fácil ver que T é linear (Verifique!)

Provemos que T é um isomorfismo, por simplicidade façamos o seguinte:

$$\text{ę} : [2,3] \rightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow \text{ę}(x) = x - 2,$$

de modo análogo, a inversa de ę será dada por:

$$\text{ę}^{-1} : [0,1] \rightarrow [2,3]$$
$$(x - 2) \longrightarrow \text{ę}^{-1}(x - 2) = x.$$

Além disso, observe o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\text{ę}^{-1}} & [2,3] \\ & \searrow & \text{M} g \\ g o \text{ę}^{-1} & & R. \end{array}$$

Afirmação 1: T é injetora

Seja $f_O \in Ker(T)$, então, $T\,[f_O](x) = (f_O o \text{ę})(x) = 0$, daí seque-se que: $f_O o \text{ę}$. Portanto,

$$(f_O o \text{ę})\, o \text{ę}^{-1} = 0.\text{ę}^{-1} = 0.$$

Dito de outro modo, temos:

$$f_O o \;\; \text{ę} o \text{ę}^{-1} \;\; = f_O = 0.$$

De sorte que: T é injetora.

Afirmação 2: T é sobrejetora

$$6g \in C([2,3])\,,\ \mathbf{I}\,\text{ę}^{-1} \in C([0,1]) : g o \text{ę}^{-1} \in C([0,1]),\ \textbf{tal que:}$$

$$T \;\; g o \text{ę}^{-1} \;\; = g o \;\; \text{ę}^{-1} o \text{ę} \;\; = g.$$

Portanto,T é sobrejetora.

Por conseguinte, T é um isomorfismo. Além disso, podemos escrever deoutra forma:

$$C([0,1]) \text{ ' } C[2,3].$$

Exemplo 2:

Seja $T : R^3 \rightarrow R^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(x,y,x) = (x - y, x + y).$$

Pede-se:

Verificar se: T é injetora e obter a $\dim Ker(T)$.

$\dim Fm(T)$ e uma base para $Fm(T)$. T é sobrejetora?

Afirmação: T não é injetora.

De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker(T) = \{(x_o, y_o, x_o) \in R^3; T(x_o, y_o, x_o) = (0,0)\}.$$

$$T(x_o, y_o, x_o) = (x_o - y_o, x_o + y_o) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_o - y_o = 0 \\ x_o + y_o = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_o = y_o = 0.$$

Portanto,

$$Ker(T) = \{(0,0,x_o) \in R^3; x_o \in R\} = [(0,0,1)].$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\dim Ker(T) = 1$.

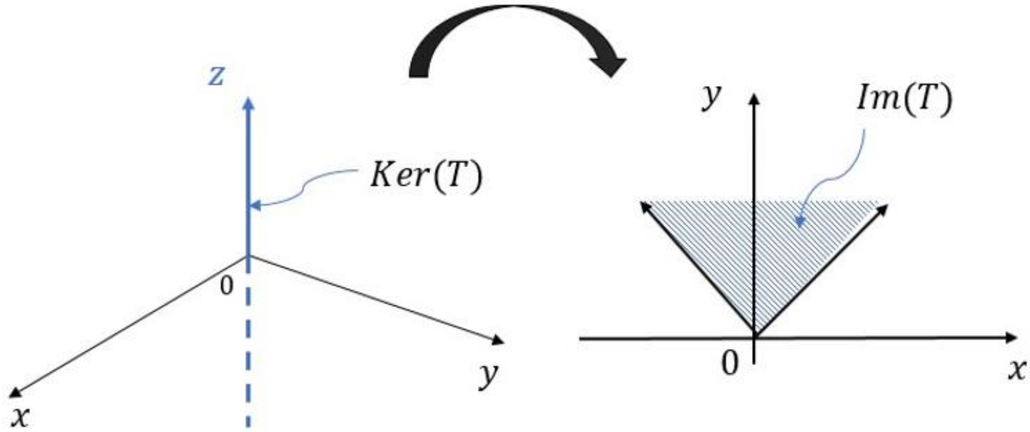
Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$3 = \dim R^3 = 1 + \dim Fm(T) \Longrightarrow \dim Fm(T) = 2$$

e $Fm(T) \subseteq R^2$. Assim, $Fm(T) = R^2$ e, portanto, T é sobrejetora.

Vamos determinar os geradores para $Fm(T)$: $T(x,y,x) = x(1,1) + y(-1,1)$.

Daí, vem: $Fm(T) = [(1,1),(-1,1)]$. Como $\dim Fm(T) = 2$, segue-se que $\beta = \{(1,1),(-1,1)\}$ é uma base para $Fm(T)$.



Eureka!!!

Teorema do núcleo e da imagem

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$
$$\dim Ker(T) = 1$$
$$\dim Im(T) = 2$$

$$dim\mathbb{R}^3 = \dim Ker(T) + dimIm(T)$$

Teorema : Sejam U e B.espaços vetoriais sobre R, sendo U de dimensão finita [$\dim U < \infty$] e seja T : U $\rightarrow$B uma transformação linear. Temos então que:

$$\dim U = \dim Ker(T) + \dim Fm(T)$$

Demonstração: Veja referências [7, 10, 13, 16, 18]

Exemplo:

Seja T : $D_1(R) \rightarrow R^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(ax + b) = (b, a + b).$$

Provar que: T é um isomorfismo, em seguida obter $T^{-1} : R^2 \rightarrow D_1(R)$.

Prova

Afirmação 1: $D_1(R) \xrightarrow{T} R^2$ é injetora $\Longleftrightarrow$ $Ker(T) = \{0x + 0\}$.

A priori, por definição o núcleo de T é dado por:

$$Ker(T) = \{p_0(x) = a_0x + b_0 \in D_2(R) ; T(a_0x + b_0) = (0, 0)\} .$$

Vejamos:

$$T(a_0x + b_0) = (b_0, a_0 + b_0) = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_0 + b_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $Ker(T) = \{p_0(x) = 0x + 0\} = \{0\} \Longleftrightarrow T$ é injetora.

Afirmação 2: T é sobrejetora

À luz do teorema do núcleo e da imagem temos:

$$2 = \dim D_1(R) = 0 + \dim Fm(T)$$

e $Fm(T) \subseteq R^2$, donde, vem: $Fm(T) = R^2$.

Portanto, T é sobrejetora, e, por consguinte, obtemos: T é uma isomorfismo. □

Agora, vamos determinar o isomorfismo inverso:

$$T^{-1} : R^2 \rightarrow D_1(R) .$$

$$T^{-1}(a_0, b_0) = h_1x + h_2 \Longleftrightarrow T(h_1x + h_2) = (a_0, b_0) . \qquad (1)$$

Dito de outra forma, precisamos determinar h_1 e h_2 em função de a_0 e b_0.

Vejamos,

$$T(h_1x + h_2) = (h_2, h_1 + h_2) = (a_0, b_0) \Longrightarrow \begin{cases} h_2 = a_0 \\ h_1 + h_2 = b_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h_2 = a_0 \\ h_1 = b_0 - a_0 . \end{cases} \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1) segue-se o isomorfismo inverso:

$$T^{-1}(a_0, b_0) = (b_0 - a_0)x + a_0.$$

2.2.3 Comentários

As compposições das transformações lineares e suas inversas produz os resultados

$$\begin{array}{ccc} D_1(R) & \overset{T}{\rightarrow} & R^2 \\ T^{-1}\circ T & \searrow & MT^{-1} \\ & & D_1(R). \end{array}$$

Daí, vem:

$$T^{-1}\circ T\ (p(x)) = p(x).$$

Analogamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} R^2 & \overset{T^{-1}}{\rightarrow} & D_1(R) \\ T\circ T^{-1} & \searrow & MT \\ & & R^2 \end{array}$$

Por conseguinte, obtemos:

$$T^{-1}\circ T\ (p(x)) = p(x).$$

2.2.4 Problema:

1. Determine $A : R^2 \rightarrow R^2$ que é uma transformação linear dada por: uma contração de fator $\frac{1}{2}$ seguida de uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{3}$ rad. Destaque $[A]$.

2.2.5 Solução:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "C_{(\frac{1}{2})}"] \arrow[dr, "A = R_{(\pi/3)} \circ C_{(\frac{1}{2})}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "R_{(\pi/3)}"] \\ & \mathbb{R}^2. \end{tikzcd}$$

Assim,

$$[A] = \left[R_{(\pi/3)} \circ C_{(\frac{1}{2})}\right] = \left[R_{(\pi/3)}\right]\left[C_{(\frac{1}{2})}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y}{4} \\ \frac{\sqrt{3}x+y}{4} \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{4}, \frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right).$$

2. Determine $A : R^2 \to R^2$ que é uma transformação linear dada por: uma rotaçãoanti-horária de $\frac{\pi}{4}$ rad seguida de uma expansão de fator $\sqrt{2}$. Destaque $[A]$.

Solução:

Com efeito, fazendo o diagrama para a composição, temos:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "R_{(\pi/4)}"] \arrow[dr, "A = E_{(\sqrt{2})} \circ R_{(\pi/4)}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "E_{(\sqrt{2})}"] \\ & \mathbb{R}^2. \end{tikzcd}$$

Assim,

$$[A] = \left[E_{(\sqrt{2})}\right] \cdot \left[R_{(\pi/4)}\right] = \left[E_{(\sqrt{2})}\right] \cdot \left[R_{(\pi/4)}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

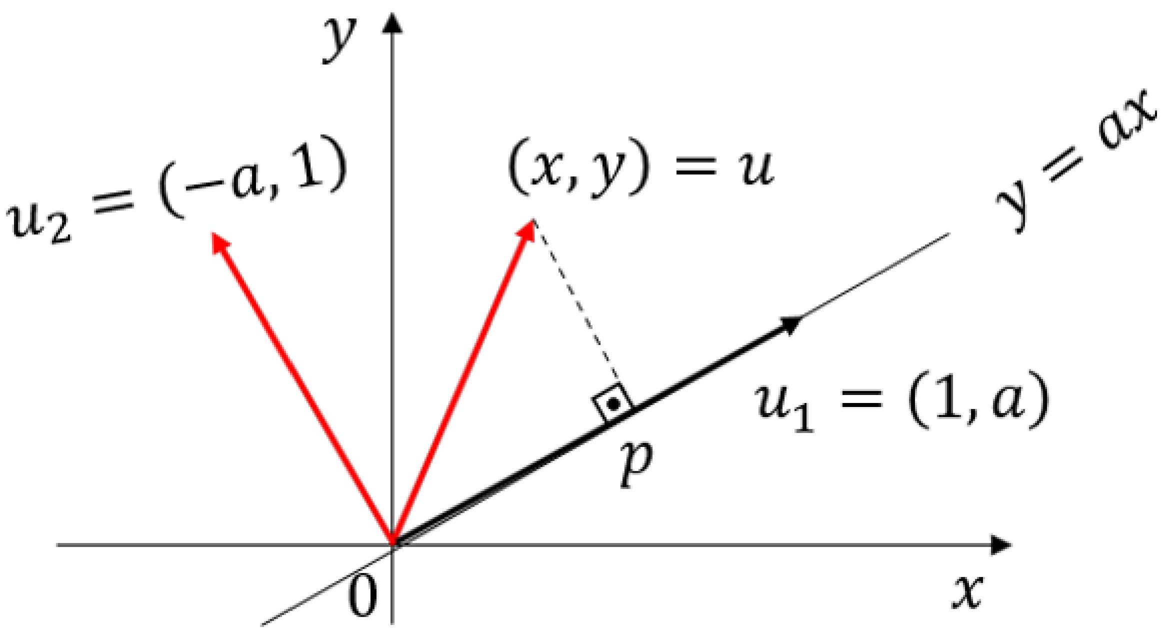
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$A(x, y) = (x - y, x + y).$$

3. Determinea projeção ortogonal $P : R^2 \to R^2$ de um vetor $u = (x, y)$ sobre a reta 5: $y = ax, a \neq 0$ (Esboce o problema.)

Solução:



Observe que $\beta = \{(1, a), (-a, 1)\}$ é uma base para o R^2, tal que a projeçăoortogonal satisfaz:

$$P\,(1,a) = (1,a) \ \text{ e } P\,(-a,1) = (0,0)\,.$$

$6(x,y) \in R^2$: I$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, tais que:

$$(x,y) = \lambda_1\,(1,a) + \lambda_2\,(-a,1)\,. \tag{1}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 - a\lambda_2 = x \\ a\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases} \underset{aE_2+E_1 \longrightarrow E_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 - a\lambda_2 = x \\ (1+a^2)\,\lambda_1 = x + ay. \end{cases}$$

donde, vem:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = y - a\lambda_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = y - a\,\frac{x+ay}{1+a^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = \frac{y+a^2y-ax-a^2y}{1+a^2}. \end{cases} \tag{2}$$

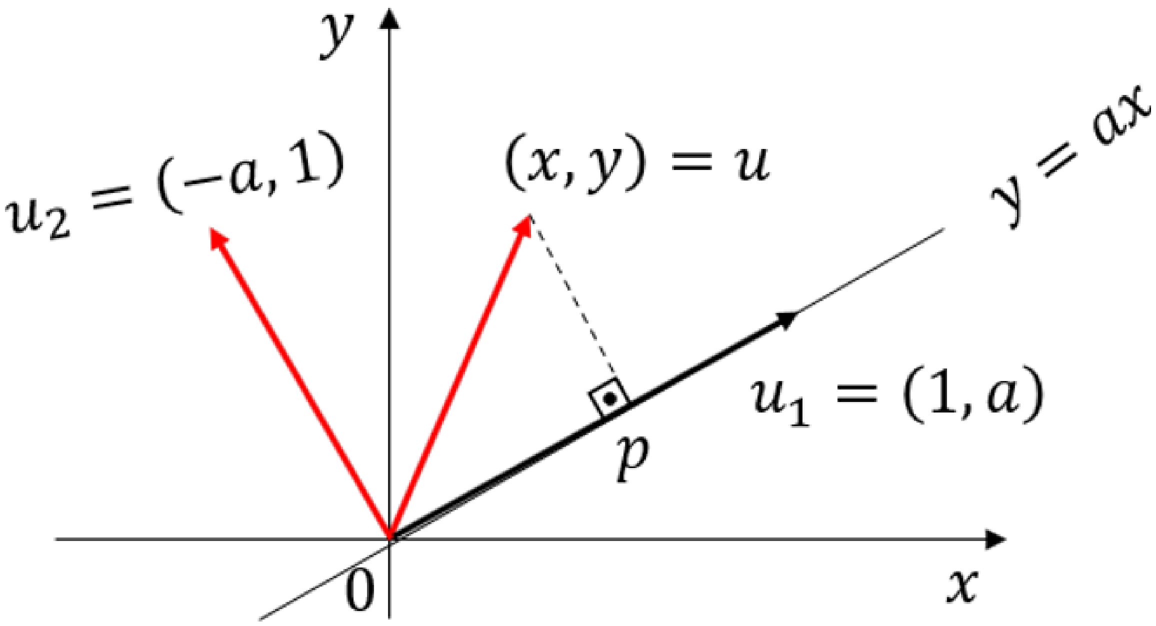
Agora, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$(x,y) = \frac{x+ay}{1+a^2}\,(1,a) + \frac{y-ax}{1+a^2}\,(-a,1)\,.$$

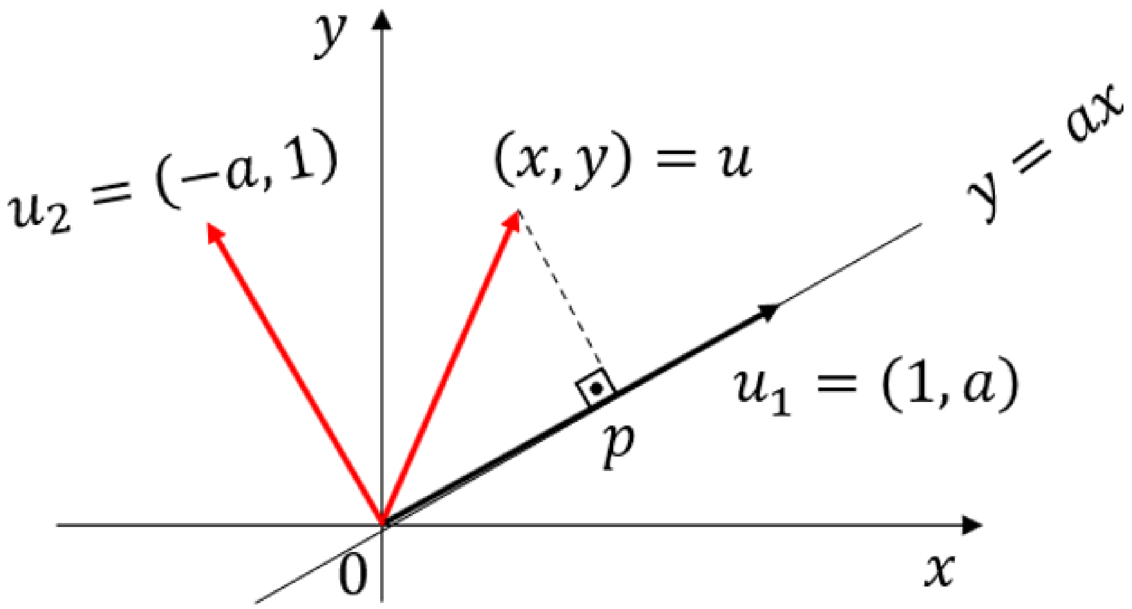
Aplicando P e sua linearidade, tem-se:

$$\begin{aligned} P\,(x,y) &= \frac{x+ay}{1+a^2}\,P\,(1,a) + \frac{y-ax}{1+a^2}\,P\,(-a,1) \\ &= \frac{x+ay}{1+a^2}\,(1,a) + \frac{y-ax}{1+a^2}\,(0,0) \\ &= \frac{x+ay}{1+a^2} . \frac{xa+a^2y}{1+a^2}\,. \end{aligned}$$

Observação: Revisitando a Geometria Analítica vetorial:



Se usarmos a projeção ortogonal P de u = (x, y) sobre u_1 = (1, a), obtemos de forma imediata:



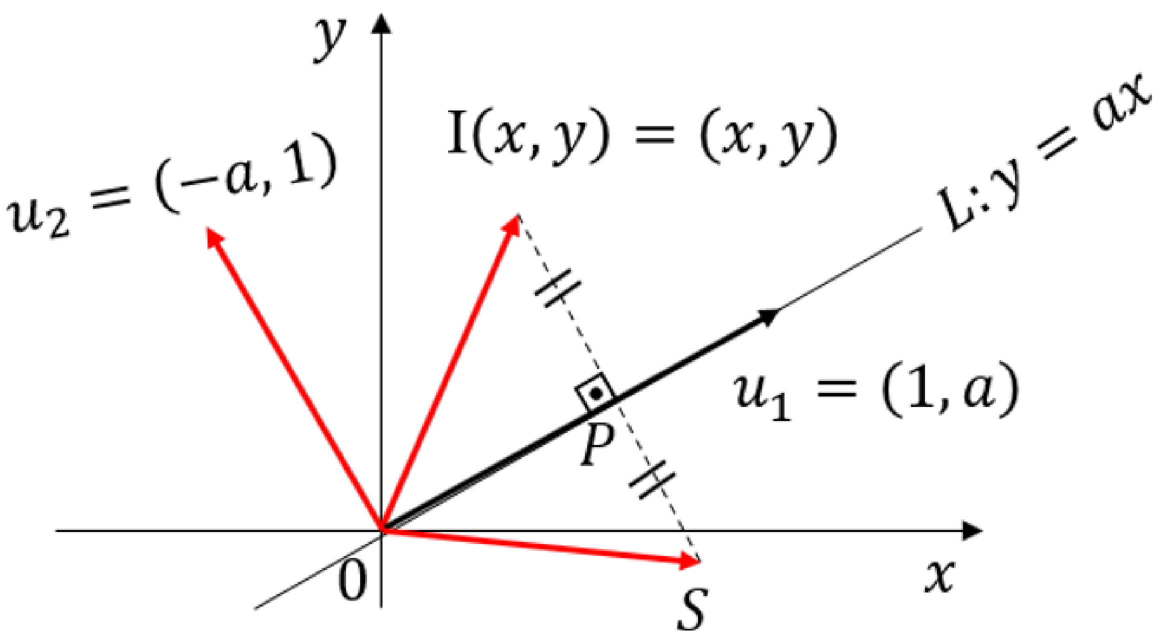
$$P^{u}_{u_1} = \frac{\langle u, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}.u_1 \Longrightarrow P^{u}_{u_1} = \frac{x+ay}{1+a^2}.(1, a) = \frac{x+ay}{1+a^2}, \frac{xa+a^2y}{1+a^2} \quad .$$

Reescrevendo a projeção ortogonal na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Obtera reflexão $S : R^2 \rightarrow R^2$ de um vetor $u = (x, y)$ em torno da reta $5 : y = ax, a \neq 0$.

Solução:



Basta notar que:

$$S - P = P + I \iff S(x, y) = 2.P(x, y) - I(x, y),$$

onde a identidade $I : R^2 \rightarrow R^2$ é dada por: $I(x, y) = (x, y)$.

A matriz da reflexão S é dada por:

$$[S] = 2[P] - I_2 \iff [S] = 2.\begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $T : R^2 \rightarrow R^2$, uma transformação linear definida por:

$$T(x, y) = (x + y, y).$$

e seja $A = ((x, y) \in R^2; \max(|x|, |y|\} = 1\}$. Determine $T(A)$.

Solução:

Cálculos Auxiliares:

$$\begin{cases} T(1, 0) = (1, 0) \\ T(1, 1) = (2, 1) \\ T(0, 1) = (1, 1) \end{cases}, \quad \begin{matrix} T(-1, 0) = (-1, 0) \\ T(-1, 1) = (0, 1) \\ T(-1, 0) = (-1, 0) \end{matrix}, \quad \begin{cases} T(-1, 0) = (-1, 0) \\ T(-1, -1) = (-2, -1) \\ T(0, -1) = (-1, -1) \end{cases}$$

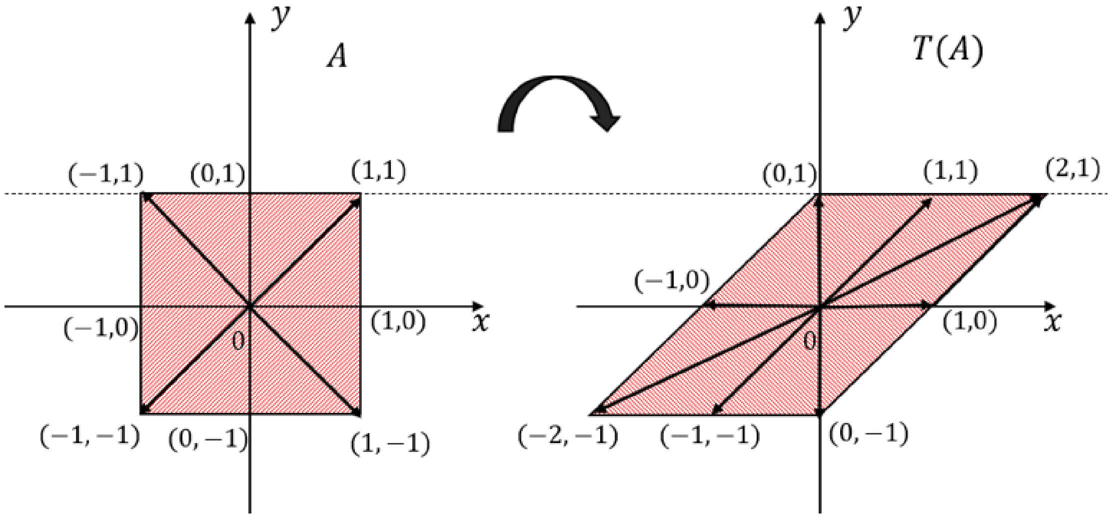
e

$$\begin{matrix} T(1, 0) = (1, 0) \\ T(1, -1) = (0, -1) \\ T(-1, -1) = (-2, -1) \end{matrix}$$

Além disso, temos

$$|x| = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad |y| = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = -1 \end{cases}$$

T transforma o quadrado de lado 1 em um pararelogramo, geometricamente, tem-se:



Seja $T : R^2 \rightarrow R^2$, uma transformação linear, definida por:

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

Pede-se:

(i) Provar por definição que T é injetora. (ii) Mostre que T é sobrejetora.

Solução:

Queremos mostrar que: $T : R^2 \rightarrow R^2$ é injetora por definição:

$$\forall u_1, u_2 \in R^2 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

Consideremos $u_1, u_2 \in R^2$, com $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, então, tem-se:

$$\begin{aligned} T[u_1] = T[u_2] &\Longrightarrow T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ 2y_1 = 2y_2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora por definição.

Queremos mostrar que: $T : R^2 \rightarrow R^2$ é sobrejetora por definição:

$$6v_0 = (a, b) \in R^2 : \mathrm{I}u_0 = (x_0, y_0) \in R^2 : T\,(u_0) = v_0$$

É necessário obter x_O e y_O em função de a e b.

Vejamos

$$T\,(u_0) = T\,(x_0, y_0) = (x_0 + y_0, x_0 - y_0) = (a, b)\,.$$

Dai, obtem-se.

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = a \\ x_0 - y_0 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{a+b}{2} \\ y_0 = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$6v_0 = (a, b) \in R^2 : \mathrm{I}u_0 = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \in R^2 : T\,(u_0) = T\,(x_0, y_0)$$

$$= T\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = (a, b) = v_0.$$

Por conseguinte, vem:

$$T\,(u_0) = v_0.$$

Ou ainda, $\mathrm{Fm}(T) = R^2$ e, portanto, T é sobrejetora por definição.

Consequentemente, T é bijetora.

5. Seja T : $D_1(R) \rightarrow R^2$ uma transformação definida por:

$$T\,(p(x)) = (p\,(0)\,, p\,(1)).$$

Prove que:

T é linear (b) T é injetora (por definição). (s) T é sobrejetora? Justifique!

Solução:

(a) (i) $6p_1, p_2 \in D_1(R)$, tem-se:

$$\begin{aligned} T((p_1 + p_2)(x)) &= ((p_1 + p_2)(0), (p_1 + p_2)(1)) \\ &= (p_1(0), p_1(1)) + (p_2(0), p_2(1)) \\ &= T(p_1(x)) + T(p_2(x)) \end{aligned}$$

$6\lambda \in R, 6p_1 \in D_1(R)$, temos:

$$\begin{aligned} T((\lambda p_1)(x)) &= ((\lambda p_1)(0), (\lambda p_1)(1)) \\ &= \lambda(p_1(0), p_1(1)) \\ &= \lambda T[p_1(x)] \end{aligned}$$

Logo, T é linear.

Queremos mostrar que: $T : D_1(R) \rightarrow R^2$ é injetora por definição:

$$6p_1, p_2 \in D_1(R) : T[p_1(x)] = T[p_2(x)] \Longrightarrow p_1(x) = p_2(x).$$

Consideremos $p(x) = ax+b \in D_1(R)$, temos: $\begin{cases} p(0) = b \\ p(1) = a + b \end{cases}$. Assim, T será reescrito na forma:

$$T[p(x)] = T[ax + b] = (b, a + b).$$

$6p_1, p_2 \in D_1(R)$ com $p_1(x) = a_1x + b_1$ e $p_2(x) = a_2x + b_2$, tem-se:

$$\begin{aligned} T[p_1(x)] = T[p_2(x)] &\Longrightarrow T[a_1x + b_1] = T[a_2x + b_2] \\ &= (b_1, a_1 + b_1) = (b_2, a_2 + b_2) \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Longrightarrow p_1(x) = p_2(x). \end{aligned}$$

De sorte que T é injetora.

(s) $T : D_1(R) \rightarrow R^2$ é sobrejetora?Queremos mostrar que:

$$6v_0 = (\;_0, \beta_0) \in R^2 : \mathbf{I} p_0(x) = a_0 x + b_0 \in D_1(R) : T[p_0(x)] = v_0$$

Ou seja, a imagem de T é igual ao próprio R^2 (Não sobra elementos no contra-domíniode T). Precisamos encontrar a_O e b_O em função de $_O$ e β_O.

De fato,

$$6v_0 = (\;_0, \beta_0) \in R^2 : \mathbf{I} p_0(x) = a_0 x + b_0 \in D_1(R) :$$

$$T[p_0(x)] = T[a_0 x + b_0] = (b_0, a_0 + b_0) = (\;_0, \beta_0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \;_0 \\ a_0 + b_0 = \beta_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \;_0 \\ a_0 = \beta_0 - b_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \;_0 \\ a_0 = \beta_0 - \;_0 \end{cases}.$$

Assim,

$$6v_0 = (\;_0, \beta_0) \in R^2 : \mathrm{I}\, [p_0(x) = a_0 x + b_0 = (\beta_0 - \;_0) x + \;_0] \in D_1(R) :$$

$$T[p_0(x)] = T[(\beta_0 - \;_0) x + \;_0] = (\;_0, (\beta_0 - \;_0) + \;_0) = (\;_0, \beta_0) = v_0.$$

Portanto, $Fm(T) = R^2$, ou seja, T é sobrejetora por definição.

Observação:

$$T[p(x)] = T[ax + b] = (b, a + b).$$

Uma outra forma, mais rebuscada de provar a sobrejetividade, será dada por:

$$T[p(x)] = T[ax + b] = (b, a + b) = b(1, 1) + (0, 1).$$

A imagem de T é gerada por $(1, 1)$ e $(0, 1)$, daí, obtemos:

$$Fm(T) = [(1, 1), (0, 1)].$$

Afirmação: $r = ((1,1), (0,1)\}$ é linearmente independente Com efeito, dada a equação

$$\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (0,1) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $r = ((1,1), (0,1)\}$ é linearmente independente e, por conseguinte, vem: r é uma base para R^2. Além disso, $\dim Fm(T) = 2$ (número de vetores de uma das bases) e $Fm(T) \subseteq R^2$. De sorte que: $Fm(T) = R^2$, ou seja, T é sobrejetora.

Não esqueça!

$$T : D_1(R) \to R^2 \text{ é injetora e sobrejetora} \Longleftrightarrow T \text{ é bijetora}$$

6. Seja $T : R^n \to R$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(=1}^{n} a_(x_(= a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ uma transformação linear. Prove que T é sobrejetora.

Solução

2.3 1° MODO:

Com efeito, para $6 \in R : IX = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, tal que:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \quad .$$

Logo, $Fm(T) = R$, ou seja, T é sobrejetora.

2.4 2° MODO:

Basta observar que:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \sum_{(=1}^{n} a_(x_(.$$

Daí, vem:

$$\dim Fm(T) = \begin{cases} 1 \\ 0 \quad \text{ou} \end{cases}$$

(Não convém), pois, T seria identicamente nula.

Por conseguinte, dim Fm (T) = 1 e Fm (T) ⊆ R, donde, obtemos: Fm (T) = R e, portanto, T é sobrejetora.

Seja T : U →B uma transformação linear. Prove que:

$$(\mathbf{i})\ T(0) = 0 \quad (\mathbf{ii})\ T(-v) = -T(v) \quad (\mathbf{iii})\ T(u-v) = T(u) - T(v)$$

$$(\mathrm{iv})\ T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(u_i)$$

2.4.1 Solução

Basta notar que:

$$T(0) = T(0) + 0 \text{ e } T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$$

Logo,

$$T(0) + T(0) = T(0) + 0 \Longrightarrow T(0) = 0.$$

com efeito,

$$0 = T(0) = T[v + (-v)] = T(v) + T(-v).$$

Daí segue-se que:

$$T(-v) = -T(v).$$

Note que:

$$T\,[u + (-v)] = T\,(u) + T\,(-v)\,.$$

Agora, pelo item anterior $T(-v) = -T(v)$, por conseguinte, obtemos:

$$T\,(u - v) = T\,(u) - T\,(v)$$

A prova será por indução finita sobre n

Para $n = 2$:

$$T\left(\sum_{i=1}^{2} u_i\right) = T\,(u_1 + u_2) = T\,(u_1) + T\,(u_2) = \sum_{i=1}^{2} T\,(u_i)\,.$$

Suponha válido para n (hipótese de indução), então falta mostrar para $n + 1$.

De fato,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i + u_{n+1}\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + T\,(u_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T\,(u_i) + T\,(u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} T\,(u_i)\,.$$

Portanto,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} T\,(u_i)\,.$$

Seja $T : D_3(R) \to D_4(R)$ uma transformação. definida por:

$$(T\,p)\,(x) = x\,p\,(x + 1)$$

Prove que: T é linear.

Solução

$6p_1, p_2 \in D_3(R)$, $6\lambda_1, \lambda_2 \in R$, tem-se:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x) &= x(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x+1) \\ &= \lambda_1 x p_1(x+1) + \lambda_2 x p_2(x+1) \\ &= \lambda_1 (T p_1)(x) + \lambda_2 (T p_2)(x). \end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

Seja $C([a, b])$ o conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow R$. Defina

$$\begin{aligned} T \quad & C([a, b]) \longrightarrow R \\ f \longrightarrow & \; T[f(x)] = \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Prove que: T é linear.

Prova:

$6f, g \in C([a, b])$, $6\lambda_1, \lambda_2 \in R$, temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) &= \int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\, dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\, dx \\ &= \lambda_1 T[f(x)] + \lambda_2 T[g(x)]. \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear.

Seja $T : R^2 \rightarrow R^2$, uma T.L.tal que: $T(1, 0) = (1, 1)$ e $T(1, 1) = (0, 3)$.

Determine:

$T(x, y)$

Se T é um automorfismo. Caso afirmativo, obtenha $T^{-1}(x, y)$

Solução:

$6(x, y) \in R^2 : I\lambda_1, \lambda_2 \in R : (x, y) = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(1, 1)$.

Daí,vem :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - y \\ \lambda_2 = y. \end{cases}$$

Assim,

$$(x, y) = (x - y) . (1, 0) + y . (1, 1) .$$

Agora, aplicando T e sua linearidade, obtemos:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T[(x - y) . (1, 0) + y . (1, 1)] \\ &= (x - y) . T((1, 0)) + y . T((1, 1)) \\ &= (x - y) . T(1, 0) + y . T(1, 1) \\ &= (x - y) . (1, 1) + y . (0, 3) \\ &= (x - y, x + 2y) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(x, y) = (x - y, x + 2y) .$$

T é bijetora.se, e somente se, T é injetora e sobrejetora.

Afirmação 1: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ é injetora$\Longleftrightarrow$ Ker (T) = ((0, 0)}

Por definição de núcleo de T, temos:

$$\text{Ker}(T) = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : T(x_0, y_0) = (0, 0)\}$$

Vejamos $T(x_0, y_0) = (x_0 - y_0, x_0 + 2y_0) = (0, 0)$. Daí vem:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{2E_1 + E_2 \to E_2} \begin{cases} x_0 - y_0 = 0 \\ 3x_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

De sorte que:

$\mathrm{Ker}(T) = ((0,0)\} \iff T$ é injetora.

Além disso, $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$.

Agora, à luz do teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$2 = \dim R^2 = 0 + \dim \mathrm{Fm}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Fm}(T) = 2$$

e como $\mathrm{Fm}(T) \subseteq R^2$ segue-se que:

$$\mathrm{Fm}(T) = R^2.$$

Dito de outro modo, T é sobrejetora e, consequentemente, obtemos: T é bijetora, ouainda, T é automorfismo. Agora, vamos determinar o automorfismo inverso

Solução:

Obter

$$T^{-1}(x,y) = (h_1, h_2) \iff T(h_1, h_2) = (x,y).$$

Vejamos,

$$T(h_1, h_2) = (h_1 - h_2, h_1 + 2h_2) = (x,y).$$

Daí vem:

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = x \\ h_1 + 2h_2 = y \end{cases} \xrightarrow[2E_1 + E_2 \to E_2]{} \begin{cases} h_1 - h_2 = x \\ 3h_1 = 2x + y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h_2 = h_1 - x \\ h_1 = \frac{2x+y}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 = \frac{2x+y}{3} - x \\ h_1 = \frac{2x+y}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h_2 = \frac{y-x}{3} \\ h_1 = \frac{2x+y}{3} \end{cases}.$$

Portanto, T^{-1} é um automorfismo

$$T^{-1}(x,y) = \frac{2x+y}{3}, \frac{y-x}{3} \quad .$$

2.4.2 Apêndice

2.4.2.1 Teorema:

O espaço das transformações lineares de U em B, tais que: dim U =n e dim B =mé isomorfo ao espaço das matrizes de ordem m × n com entradas reais, ou seja, 5 (U; B) é isomorfo a M_{mvn} (R) e, denotamos por:

$$5\,(U; B) \text{ ' } M_{mvn}\,(R)$$

A fixação das bases β c U e β'c B determina portanto uma transformação

$$\begin{aligned} \Phi: \quad & 5\,(U; B) \longrightarrow M_{mvn}\,(R) \\ & f \longrightarrow \quad \Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta J} = B\,(f) \end{aligned}$$

2.5 DEMONSTRAÇĂO

Afirmação 1: Φ é linear

$$\text{(i) } \Phi(f_1 + f_2) = [A_1 + A_2]^{\beta}_{\beta J} = [A_1]^{\beta}_{\beta J} + [A_2]^{\beta}_{\beta J} = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$$
$$\text{(ii) } \Phi(\lambda f_1) = [\lambda A_1]^{\beta}_{\beta J} = \lambda\,[A_1]^{\beta}_{\beta J} = \lambda\Phi(f_1)\,.$$

Portanto, Φ é linear.

Afirmação 2: Φ é injetora

De fato, $Ker(\Phi) = (f \in 5\,(U;B) : \Phi(f) = 0\}$.

Vejamos $\Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta J} = B\,(f) = 0$,

Como $[f\,(u)]_{\beta J} = [A]^{\beta}_{\beta J}\,[u]_{\beta} = 0$, segue-se que:

$f\,(u) = 0$, 6u ∈ U. Consequentemente, vem: $f \;\Xi\; 0$.

Logo, $Ker(\Phi) = (0\}$, ou ainda, Φ é injetora.

Afirmação 3: Φ é sobrejetora

6B ∈ M_{mvn}(R), If ∈ 5 (U; B) , tal que:

$$\Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta J} = B(f) = B$$

Consideremos $f : U \longrightarrow B$, tal que:

$$f(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \ldots + b_{m1}v_m$$

$$f(u_2) = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{m2}v_m$$

———— — — — — — — — — — — — —

$$f(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \ldots + b_{mn}v_m.$$

Entăo, temos:

$$B \quad \ldots \quad \ldots \quad ^{n} \quad _{mvn}$$

De sorte que: Φ é sobrejetora. Por conseguinte, obtemos: $5(U;B)$ é isomorfo a $M_{mvn}(R)$.

2.5.1 Corolário

Sejam U e B dois espaços vetoriais sobre R tais que:

$\dim U = n$ e $\dim B = m$. Entăo, o espaço $5(U;B)$ tem dimensão m.n

2.5.2 Demonstraçăo

Sejam β e β', as bases respectivamente de U e B.

$U \longrightarrow B$, $\Phi : 5(U;B) \longrightarrow M_{mxn}(R)$, temos entăo, $\Phi(T) = [T]^{\beta}_{\beta J} \Longrightarrow \dim 5(U;B) = \dim M_{mxn}(R) = m.n$

3 CONCLUSĂO

Este olhar matemático de mentalidade crescente criativo e flexível, pode ser dada como interpretações geométricas das transformações lineares do plano no plano na linguagemdas matrizes de ordem 2, sem nenhum acréscimo em dificuldade no letramento matemá-tico. Vale ressaltar que: as composições de transformações do plano no plano, serve como um primeiro modelo de computação gráfica .

REFERÊNCIAS

De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Convite à Matemática, Coleção Professorde Matemática, RJ, SBM 2012.

Boldrini/ Costa/ Figueiredo/Wetzler. Álgebra Linear. Editora Harbra.3ª ed. 1986.

Callioli, Carlos A., Hygino H. dimingues, Roberto C. F. Costa. 6ª ed. Atualeditora. 1990

De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Manual de Redação Matemática,Coleção Professor de Matemática, RJ, 2ª Edição, SBM 2018.

Jänich, Klaus, Álgebra Linear. LTC. 1998.

Lang, Serge. Álgebra Linear. Coleção Clássicos da Matemática. Rio de Janeiro.Editora Ciência Moderna, 2003.

Lipschutz, Seymour, Schaum´s solved problems series: 3000 solved problems inLinear Algebra. McGran-Hill company, 1989.

Oliveira, Augusto J. Franco de. Lógica e Aritmética, Editora UNB. 2004.

https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147 capturado em 15 de dezembro de 2022 às 13h05min

Hoffman, K., Kunze, R. Álgebra Linear.2ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos eCientíficos. 1979.

(https://pt.wikipedia.org/wiki/Espa%C3%A7o_vetorial capturado em 15 de dezembro de 2022 às 15h10min.

Eves, Howard, Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino

H. Domingues- Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

Coelho, Flávio Ulhoa; Lourenço, Maria Lilian, Álgebra Linear Editora daUniversidade de São Paulo, 2001

Anton, Howard. Rorres. Álgebra Linear com Aplicações 8 ed., Porto Alegre:Bokman,2001.

Lima, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária IMPA. 3ª ed. 1998.

Aaboe, Asger, Episódios da História Antiga da Matemática, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, 1984.

Silva, Antônio de Andrade, Álgebra Linear-João Pessoa: Ed. Universitária UFPB
2007.