

## Métodos de Aproximação nos Problemas Variacionais



<https://doi.org/10.56238/sevened2023.006-150>

### Henrique Mariano do Amaral

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), Mestrado em Engenharia Mecânica - UNICAMP, Mestrado em Engenharia da Computação UFRJ. Atua no CCT, São Luís, Maranhão, Brasil. Campus São Luís: Cidade Universitária Paulo VI, Av. Avenida Lourenço Vieira da Silva; N.º 1000, CEP: 65.055-310, Jardim São Cristóvão – São Luís/ MA, Brasil.

E-mail: hmca13@gmail.com

### Ivanildo Silva Abreu

Pós Doutorado em Automação e Controle (EESC - USP), Professor Adjunto IV, DEMATI - CECEN; Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), São Luís, Maranhão, Brasil. Campus São Luís: Cidade Universitária Paulo VI, Av. Avenida Lourenço Vieira da Silva; N.º 1000, CEP: 65.055-310, Jardim São Cristóvão – São Luís/ MA, Brasil.

E-mail: ivanildoabreu@yahoo.com.br

### Cristovam Filho Dervalmar Rodrigues Teixeira

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), Mestrado em Engenharia da Computação e Sistemas - UEMA, Professor Assistente II, São Luís, Maranhão, Brasil. Campus São Luís: Cidade Universitária Paulo VI, Av. Avenida Lourenço Vieira da Silva; N.º 1000, CEP: 65.055-310, Jardim São Cristóvão – São Luís/ MA, Brasil.

E-mail: cristovamfilho17013@gmail.com

### Elder Abreu Junior

Mestrado em Matemática (PROFMAT), Professor Substituto da Universidade Federal do Maranhão (UFMA) Cidade Universitária do Bacanga, s/n – Bacanga, São Luís, Ma, Av. dos Portugueses, N.º 1966, CEP: 65080-805, Vila Bacanga; São Luís Maranhão Brasil.

E-mail: elderabreu@yahoo.com.br

### Rildenir Ribeiro Silva

Mestrado em Engenharia da Computação e Sistemas-UEMA, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Maranhão-IFMA Campus Rosário, Avenida Principal, S/N, Residencial VAÍparaiso, Sapucaia, Rosário-MA/CEP: 65150-000 –Campus Rosário;

E-mail: ril.ifmatematico@gmail.com

### Alan Jefferson Lima Aragão

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí - UESPI e Mestrando em Matemática pelo programa PROFMAT - UEMA, Professor efetivo da Seduc - MA e Professor da rede particular de ensino de Teresina - PI, Rua Antônio Guimarães, n.º2514, CEP: 65636-460; Parque Piauí - Timon/MA, Brasil.

E-mail: alanjeffersonlima@gmail.com

### Vankys Ferreira Reis

Licenciado em Ciências - Habilitação em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão, Mestrando em Matemática pelo PROFMAT - UEMA, Professor efetivo em SEDUC - MA e SEMED - Alto Alegre do Pindaré – MA; Rua Rio Branco, S/N, Bairro: Trizidela, CEP: 65.398-000.

E-mail: vankysferreira@gmail.com

### Karillos Alexandre Sousa Pereira

Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática (UFPI) e Mestrando em Matemática pelo PROFMAT - UEMA, Professor Efetivo em Magalhães de Almeida - MA, SEMECT Av Getulio Vargas, 155 – centro, CEP 65 560 000, Magalhães de Almeida MA.

E-mail: karillos-alexandre@hotmail.com

### Marcus Vinicius Viegas Rodrigues

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Maranhão, Especialista em Ensino da Matemática (IFMA) e Mestrando em Matemática pelo PROFMAT - UEMA, Professor Efetivo em Pedro do Rosário-MA, U.I. Nelson Marques, MA-006, s/n, CEP 65206-000, Povoado Anta.

E-mail: marcus.vinicius.viegas.2015@gmail.com

### Danilo Furtado Veras

Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Universidade Estadual Brasil. Campus São Luís: Cidade Universitária Paulo VI, Av. Avenida Lourenço Vieira da Silva; N.º 1000, CEP: 65.055-310, Jardim São Cristóvão – São Luís/ MA, Brasil.

E-mail: daniloveras10@gmail.com

### RESUMO

Este material de pesquisa sugere a exploração de abordagens para lidar com problemas variacionais por meio de técnicas de aproximação. Em contextos matemáticos, problemas variacionais envolvem otimização de funções, e os métodos de aproximação buscam encontrar soluções aproximadas para esses



problemas. Essas abordagens podem ser essenciais em situações em que encontrar uma solução exata é desafiador ou impraticável, permitindo a análise e resolução eficaz de questões complexas por meio de técnicas aproximativas.

**Palavras-chave:** Métodos de aproximação, Séries infinitas, MATLAB, Condições de contorno.

## 1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Introduzir-se-á aqui alguns conceitos da teoria da integração de Lebesgue<sup>1</sup> e dos espaços de Sobolev. Recomenda-se ao leitor um estudo prévio do *capítulo 2 do volume 1* desta obra para relembrar conceitos básicos dos espaços lineares.

**Definição 1:** Denomina-se *domínio*  $\Omega$ , no sentido de Lebesgue, a um subconjunto (aberto ou fechado) de  $\mathbb{R}^n$  com interior não vazio.

**Definition 2:** Denomina-se *integral* mensurável de Lebesgue de funções  $f$  sobre um dado domínio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

**Definição 3:** Define-se *norma* de Lebesgue, à norma (que é uma função  $\|\cdot\|$  sobre um espaço euclidiano normado cujos valores são não negativos – vide item 2.9 pag.85 no volume 1 desta obra) estabelecida pela expressão

$$\|f\|_{L^p \Omega} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

**Definition 4:** O espaço de Lebesgue é um espaço de Banach<sup>2</sup> definido por

$$L^p \Omega := \{f : \|f\|_{L^p \Omega} < \infty\} \quad (1.1.1)$$

**Definition 5:** Diz-se que duas funções  $f$  e  $g$  são iguais se elas diferem entre si em um subconjunto de pontos de medida zero, isto é,

$$\|f - g\|_{L^p \Omega} \equiv 0 \quad (1.1.2)$$

<sup>1</sup> Henri Leon Lebesgue (28/jun/1875 – 26/jul/1941), matemático francês.

<sup>2</sup> Stefan Banach (30/mar/1892 – 31/ago/1945), matemático polonês.



Observamos que, num espaço de Lebesgue, por ser um espaço de Banach permanecem válidas as desigualdades de Minkowski<sup>3</sup>:

$$\|f + g\|_{L^p \Omega} \leq \|f\|_{L^p \Omega} + \|g\|_{L^p \Omega} \quad \therefore 1 \leq p < \infty, f, g \in L^p \Omega ;$$

Holder<sup>4</sup>:

$$\|fg\|_{L^1 \Omega} \leq \|f\|_{L^p \Omega} \|g\|_{L^q \Omega} \quad \therefore 1 \leq p, q < \infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; f \in L^p \Omega, g \in L^q \Omega$$

Schwarz<sup>5</sup>:

$$\int |fg| \, d\Omega \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad \therefore \|\cdot\|_2 = \text{2-norma.}$$

Deve-se observar que a chave dos processos para a determinação de uma solução numérica para equações diferenciais será a habilidade que ter-se-á em desenvolver funções precisas para os métodos de aproximação empregados no espaço de definição da EDP estudada.

Para se ter uma visão geral, seja a aproximação de uma dada função em alguma região

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  cujo contorno é limitado por uma curva  $\Gamma$ . Na solução de EDPs normalmente é prescrita determinadas condições em seu contorno; precisa-se então de uma função tal que satisfaça as condições de contorno prescrita,  $\psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$ . Seja então um conjunto de funções  $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$  introduzida de tal forma que  $\forall \varphi|_{\Gamma} = 0$ , de forma que em todos os pontos interiores de  $\Omega$  pode-se aproximar  $\phi$  por

$$\phi \approx \psi + \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i \tag{1.1.3}$$

A computação dos coeficientes  $a_i$  é que fará com que a aproximação construída será boa ou insatisfatória.

## 2 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

A ideia deste método consiste em que ao achar o extremo de um funcional  $J f$  seja considerado no lugar do espaço das funções admissíveis, somente as funções que se pode representar como

<sup>3</sup> Hermann Minkowski (22/jun/1864 – 12/jan/1909), matemático alemão.

<sup>4</sup> Otto Ludwig Holder (22/dez/1859 – 29/ago/1937), matemático alemão.

<sup>5</sup> Karl Hermann Amandus Schwarz (25/jan/1843 – 30/nov/1921), matemático alemão;



combinações lineares das funções coordenadas que formam uma base de um subespaço das funções admissíveis (também chamadas de funções de base ou ainda funções admissíveis):

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \quad (2.1.1)$$

onde  $a_j$  são constantes.

**Definição 1:** O sistema ou conjunto de funções  $\varphi_j$ , é chamado de funções coordenadas.

Conjunto  $\varphi_j$  está formado por funções  $\varphi_j$  que são linearmente independentes e que constituem um sistema completo de funções no espaço considerado e que cada uma delas satisfaça exatamente as condições de contorno essenciais, por exemplo:

$$\varphi_j(a) = \varphi_j(b) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.2)$$

Falando em termos gerais, quando se pede que as funções  $f_n(x)$  sejam admissíveis, impõe-se às funções coordenadas  $\varphi_j(x)$  certas condições como limitações quanto à derivabilidade e quanto à verificação das condições de contorno. Dessa forma, o funcional  $J f_n$  se converte em uma função dos argumentos  $a_j$ , isto é,

$$J f_n = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.1.3)$$

Determina-se os valores de  $a_j$  que oferecem extremos à função resolvendo o seguinte sistema:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_j} \right) = 0, \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.4)$$

que, via de regra, é não linear.

A sequência  $f_n(x)$  assim encontrada converge para o mínimo de  $J f$ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J f_n = \min J f \quad (2.1.5)$$

No entanto, da expressão anterior não se pode concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . A sequência minimizante pode não convergir para a função que realiza o extremo na classe de funções admissíveis.



Podem-se indicar condições que garantam a existência do mínimo absoluto do funcional e que ele se alcança nas funções  $f_n(x)$ . No caso do funcional, por exemplo,

$$J(f) = \int_a^b I(f, f', x) dx \quad \text{with} \begin{cases} f(a) = \alpha \\ f(b) = \beta \end{cases} \quad (2.1.6)$$

estas condições são:

- a função é contínua em relação ao conjunto de seus argumentos para qualquer  $f \in D$ , onde  $D$  é o domínio do problema;
- Existem constantes  $\alpha > 0; p > 1; \beta$  tais que  $I(f, f', x) \geq |f'|^p + \beta$
- A função  $I(f, f', x)$  tem derivada parcial contínua  $\frac{\partial I}{\partial f'}$ , e esta é uma função decrescente qualquer que seja  $x, f \in D$ .

Se por este método se determina um mínimo absoluto do funcional, o valor aproximado do dito mínimo se acha por excesso, posto que o mínimo do funcional para as funções admissíveis arbitrárias não é maior que o mínimo desta para uma parte da classe de funções admissíveis.

Exemplos

Ache a solução aproximada do problema sobre o mínimo do funcional

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx$$

Com  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 0$ . Compare a solução aproximada com a solução exata.

**Solução:**

### Método de Rayleigh-Ritz

Seja  $\varphi_k(x) = 1 - x^k, k = 1, 2, \dots, n$  as funções coordenadas. Vê-se que, por  $\varphi_k(x)$  não, satisfaz as condições de contorno essenciais e são LI. Além disso, formam um sistema completo no espaço  $C^1[0,1]$ .



Para  $k=1$  temos  $y_1 = a_1 - x$  levando o valor aproximado de  $y$ ,  $y_1$ , no funcional, tem-se:

$$J y_1 = \int_0^1 \left( a_1^2 - 2x a_1 + x^2 \right) dx$$

$$J y_1 = \int_0^1 \left( a_1^2 - 4x + 3x^2 + 2x^3 - x^4 + 2a_1 x - x^2 \right) dx$$

$$J y_1 = \left( \frac{23}{10} a_1^2 - \frac{1}{15} a_1^2 - \frac{41}{30} a_1 a_2 + \frac{1}{6} a_1 - \frac{1}{10} a_2 \right)$$

Resolvendo

$$\left( a_1 \right) \quad \frac{3}{5} a_1 + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{18}$$

Logo

$$y_1 = -\frac{5}{18} x - x^2$$

Para  $k=2$  (uma solução mais precisa que a anterior).

$$y_2 = a_1 - x + a_2 x^2 = a_1 - x + a_2 x^2 = a_1 x - x^2 + a_2 x^2 - x^3$$

Levando o valor aproximado de  $y$ ,  $y_2$ , no funcional, e fazendo as operações, tem-se:

$$J y_2 = \left( \frac{23}{10} a_1^2 - \frac{1}{15} a_2^2 - \frac{41}{30} a_1 a_2 + \frac{1}{6} a_1 - \frac{1}{10} a_2 \right)$$

Derivando parcialmente em relação aos parâmetros e igualando a zero, obtém-se:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \right) = \left( \frac{23}{5} \right) a_1 + \left( \frac{41}{30} \right) a_2 + \left( \frac{1}{6} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \right) = -\left( \frac{2}{15} \right) a_2 - \left( \frac{41}{30} \right) a_1 - \left( \frac{1}{10} \right) = 0$$

Resolvendo-se o sistema acima, tem-se:

$$a_1 = \left( \frac{10615}{101393} \right)$$

$$a_2 = -\left( \frac{799}{2473} \right)$$



logo

$$y'' = \left( \frac{10615}{101393} \right) 1 - x - \left( \frac{799}{2473} \right) 1 - x - x^2$$

### Solução Exata:

$$J y = \int I y', y, x dx$$

tem a seguinte equação de Euler:

$$\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial I}{\partial y'} \right) = 0$$

Como  $\partial I / \partial y = -2y - 2x$ ,  $\partial I / \partial y' = 2y'$  e  $\partial 2y' / \partial x = 2y''$

logo, formando a equação de Euler, tem-se:

$$-2y + x - 2y'' = 0$$

ou seja

$$y'' + y + x = 0$$

que é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução é: Seja  $y = x$  uma solução particular; a solução geral da equação diferencial representativa da equação de Euler é:

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x + y \therefore y = -x$$

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x - x$$

Usando as condições de contorno, obtém-se:

$$y(0) = 0 \Rightarrow \alpha \cos 0 + \beta \sin 0 - x = 0 \Rightarrow \alpha = x$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \alpha \cos 1 + \beta \sin 1 - x = x \cos 1 - 1 + \beta \sin 1 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{x \cos 1 - 1}{\sin 1} = \frac{x(1 - \cos 1)}{\sin 1}$$

$$\beta = \frac{x(1 - 0,84147)}{0,54030} = 0,546x$$



Logo a solução geral é:

$$y = x \cos x + 0,546x \sin x - x$$

$$y = x \cos x + 0,546 \sin x - 1$$

Mostra-se abaixo, um estudo comparativo entre as funções  $y_1, y_2$  e  $y$  (desenvolvido no [0,1] os valores das três funções são aproximados e que todas satisfazem as condições de contorno dadas.

$$x := 0,05..1$$

$$y_1(x) := -\frac{5}{18} \cdot (x - x^2)$$

$$y_2(x) := \frac{10615}{101393} \cdot (x - x^2) - \frac{799}{2473} \cdot (x^2 - x^3)$$

$$y(x) := x \cdot (\cos(x) + 0.546 \cdot \sin(x) - 1)$$

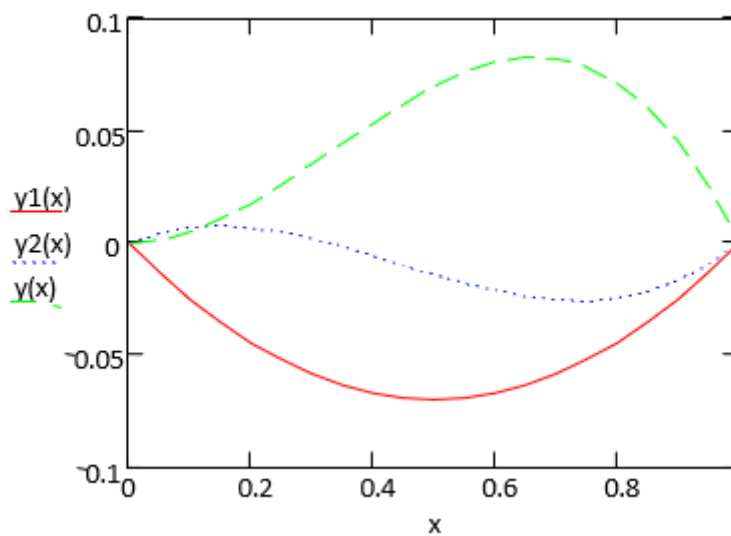


FIGURA 12-1: AUTOR

Aplique o Método de Rayleigh-Ritz para o funcional

$$J u = \int_a^b u u'' dx, \quad \therefore u(a) = \alpha, u(b) = \beta, u \in C^2[a, b] \quad (2.1.7)$$

Solução:

Seja escolher  $u = u_0 + \sum_{i=1}^n a_i u_i$ , onde:

$$u_0(a) = \alpha, u_0(b) = \beta, \quad u_i(a) = u_i(b) = 0, \forall i \geq 1 \wedge u_i \in C^2[a, b]$$





O que atende as condições subsidiárias necessárias. Assim, substituindo-se no funcional, se tem

$$J[u] = \int_a^b \left( u_0 u_0'' + \sum_{i=1}^n a_i u_0 u_i'' + u_i u_0'' + \sum_{ij=1}^n a_i a_j u_i u_j'' \right) dx$$

Definindo-se  $c_i = -\frac{1}{2} \int_a^b u_0 u_i'' dx$ , se tem que o funcional pode ser reescrito da seguinte forma:

$$J[u] = L_{00} - 2 \sum_{i=1}^n a_i c_i + \sum_{ij=1}^n L_{ij} a_i a_j$$

A condição de extremo é que  $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0$ , logo  $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0 = -2c_i + 2 \sum_{j=1}^n L_{ij} a_j$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Na forma matricial, se tem

$$\begin{bmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Logo a solução, que é encontrar os coeficientes das funções de base, pode ser reduzido na solução de um sistema de equações lineares:

$$L\alpha = c \Rightarrow \alpha = L^{-1}c$$

### Exercícios

1 Encontrar uma solução aproximada da equação diferencial não linear  $y'' - \frac{3}{2}y^2 = 0$

obedecendo às condições  $y(0) = 4; y(1) = 1$ .

2 Achar as funções minimizantes dos seguintes funcionais e comparar com os resultados das soluções exatas:

a -  $J[y] = \int_0^1 y'^2 + 2y \, dx \quad \therefore y(0) = y(1) = 0$

b -  $J[y] = \int_0^2 2xy + y^2 + y'^2 \, dx \quad \therefore y(0) = y(2) = 0$



### 3 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS (MRP)

#### 3.1 INTRODUÇÃO

São métodos de aproximação utilizados para resolver equações diferenciais. Estes métodos têm diversos procedimentos, dentre os quais se destacam o Método dos Momentos, o Método de Galerkin, o Método da Colocação, o Método do Subdomínio e o Método dos Mínimos Quadrados.

#### 3.2 CONCEITOS BÁSICOS

Seja  $L$  um operador diferencial de um processo qualquer, que aplicado a uma função  $u$ , produz outra função  $p$ , em algum domínio  $\Omega$  (espaço onde o operador está definido):

$$L_{\Omega} u = p \tag{3.1.1}$$

Seja um problema representado por um conjunto de equações homogêneas válidas no interior de  $\Omega$  :

$$L_{\Omega} u = 0 \tag{3.1.2}$$

e seja a definição de produto escalar ou interno de  $L_{\Omega} u$  com outra função  $v$  dado por:

$$L_{\Omega} u, v = \int_{\Omega} L_{\Omega} u \cdot v d\Omega \tag{3.1.3}$$

Pode-se ver que, integrando-se por partes a expressão acima, sucessivamente, podemos eliminar as derivadas de  $u$ . Da análise linear, sabe-se que tal procedimento leva a uma forma transposta do produto interno - com o operador adjunto de  $L_{\Omega}$  - associado aos termos contendo informação sobre as condições de contorno:

$$\int_{\Omega} L(u).v.d\Omega = \int_{\Omega} uL^*(v).d\Omega + \int_{\Gamma} [G(v)S(u) - G(u)S^*(v)].d\Gamma \tag{3.1.4}$$

Onde  $\Gamma$  é a superfície de contorno de ;  $G,S$  são operadores diferenciais devido a integração por partes e  $L^*$  é o operador adjunto de  $L_{\Omega}$ .

Por definição  $G v$  contém os termos de  $v$  resultantes da primeira fase de integração por parte e  $S u$  os correspondentes termos em  $u$ .

Se  $L = L^*$  então  $L$  é dito auto adjunto e neste caso se tem também  $S = S^*$ .



A integração por partes acima conduz também a duas categorias de condições de contorno:

- o conjunto  $G \cup v$  prescrito é denominado de condição de contorno essencial; e
- o conjunto  $S \cup u$  prescrito é denominado condição de contorno natural.

As condições de contorno do tipo essencial precisam ser conhecidas em alguns pontos, a fim de possibilitar a unicidade da solução. Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2$  porções complementares da superfície total

$\Gamma$  ( $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ ), então, para um operador auto adjunto  $L$ , tem-se:

- $G \cup v$ , prescrito sobre  $\Gamma_1$
- $S \cup u$ , prescrito sobre  $\Gamma_2$

Deve-se lembrar que, todo operador auto adjunto é positivo-definido se:

$$\int_{\Omega} L u \cdot u \, d\Omega > 0, \forall u \quad (3.1.5)$$

$$\int_{\Omega} L u \cdot u \, d\Omega = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$$

Para determinar se  $L_{\Omega}$  é positivo-definido podemos integrar o produto interno por partes até ele conter derivadas de uma mesma ordem. Essa operação é fundamental na transformação de  $L_{\Omega}$  em  $L^*$ .

Deve-se ter sempre em mente que a propriedade de positividade definida é extremamente importante para o estabelecimento de esquemas de solução e também na construção de procedimentos variacionais.

### Exemplos

1 Propriedades análogas à auto adjunto e positivo-definido em operadores  $L_{\Omega}$  pode-se também definir para as matrizes (como foi apresentado no capítulo 1); estas propriedades são respectivamente simetria e positivo-definida. (Lembrar que uma matriz é dita simétrica se  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  ou ainda  $y, \mathbf{A}x = x, \mathbf{A}y$  e é dita positivo-definida se  $x^T \mathbf{A}x > 0, \forall x \neq 0$  e  $x^T \mathbf{A}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ).

2 Mostre que o operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  é auto adjunto e positivo definido no intervalo  $[0,1]$ .

Solução:

Sejam  $u$  e  $v$  duas funções quaisquer, então



$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(u), v) &= \int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) v dx = \\
&= - \left. \frac{du}{dx} v \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \\
&= - \left. \frac{du}{dx} v \right|_0^1 + \left. u \frac{dv}{dx} \right|_0^1 + \int_0^1 \left( - \frac{d^2 v}{dx^2} \right) u dx
\end{aligned}$$

que comparando com (12.3.4) vemos que  $\Omega$  é auto adjunto. Note que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} u &= u, \\
\mathbf{S} u &= - \frac{du}{dx} \\
\mathbf{G} v &= v, \\
\mathbf{S} v &= - \frac{dv}{dx} \\
\mathbf{S} &= \mathbf{S}^*
\end{aligned}$$

A condição de contorno essencial  $u$  é prescrita; e a condição de contorno natural é  $-du/dx$  prescrito. Se  $u=v$  e condições de contorno são homogêneas ver-se-á que  $\mathcal{L}_\Omega$  é positivo- definida.

Investigue as propriedades do operador  $\mathcal{L}_\Omega u = \frac{d^4 u}{dx^4}$  em  $[0,1]$ .

Solução

Seja  $v$  uma função auxiliar qualquer, então o produto interno é:

$$\int_0^1 \mathcal{L}(u)v dx = \int_0^1 \frac{d^4 u}{dx^4} v dx$$

integrando por parte a expressão acima, quatro vezes, se tem:

$$\int_0^1 \mathcal{L}(u)v dx = \left. v \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_0^1 - \left. \frac{dv}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_0^1 + \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{du}{dx} \right|_0^1 - \left. \frac{d^3 v}{dx^3} u \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{d^4 v}{dx^4} u dx$$

Colocando a expressão acima na forma de (12.3.4) vê-se que:



$$\int_0^1 \mathcal{L}(u)v dx = \int_0^1 \mathcal{L}^*(v)u dx + \left[ G_1(v)S_1(u) - G_2(v)S_2(u) \right]_0^1 + \left[ S_2(v)G_2(u) - S_1(v)G_1(u) \right]_0^1$$

logo, as condições de contorno essenciais são:

$$G_1 u = u; G_2 u = \frac{du}{dx}$$

Prescritas e as condições de contorno naturais são:

$$S_1 u = \frac{d^3 u}{dx^3}; S_2 u = \frac{d^2 u}{dx^2}, \text{ prescritas.}$$

O operador  $\mathcal{L}^* \bullet = \frac{d^4 \bullet}{dx^4} = \mathcal{L} \bullet \Rightarrow$  ser auto adjunto.

Agora colocando  $u=v$  e fazendo as condições de contorno homogêneas, obtém-se:

$$\int_0^1 \mathcal{L}(u)u dx = \int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx \geq 0$$

que mostra ser o operador em questão positivo-definido. Isto é, para que  $\mathcal{L}_\Omega u \geq 0$  para toda e qualquer função  $u$ , precisa-se que se restrinja no mínimo  $u^0=u^1=0$  ou

$$\left( u^0 = 0 \wedge \left( u^1 = \frac{du}{dx} = 0 \right) \right).$$

### 3.3 O MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS - MÉTODO GERAL

Os métodos dos resíduos ponderados são procedimentos numéricos para a solução de um conjunto de equações diferenciáveis da forma:

$$\mathcal{L} u_0 = p \text{ em } \Omega \tag{3.1.6}$$



com as seguintes condições de contorno:

$$\text{essencial: } \mathcal{L} u_0 = g|_{\Gamma_1}$$

$$\text{natural: } \mathcal{L} u_0 = q|_{\Gamma_2}$$

com  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$  sendo a superfície externa do domínio  $\Omega$ , e  $u_0$  a solução exata. A função  $u_0$  é primeiramente aproximada por funções  $\phi_k(x)$ , tal que:

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \tag{3.1.7}$$

onde  $\alpha_k$  são parâmetros indeterminados e  $\phi_k(x)$  são funções linearmente independentes, retiradas de uma sequência completa de funções  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  as funções são usualmente escolhidas de tal forma que satisfaçam certas condições, denominadas de condições de admissibilidade, relacionando as condições de contorno e o grau de continuidade. As funções são consideradas como pertencendo a um espaço linear, isto é, podem ser combinadas linearmente e têm produto interno, norma e métrica conforme definidos no capítulo 2 do volume 1 desta obra.

Lembrando que uma sequência de funções linearmente independentes é dita completa (vide item 2.6 e seguintes no volume 1 desta obra) se um número  $N$  e um conjunto de constantes  $\alpha$  podem ser achados tal que, dada uma admissibilidade e uma função arbitrária  $u_0$ , tem-se:

$$\left\| u_0 - \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\| \leq \beta \tag{3.1.8}$$

onde a quantidade  $\beta$  é uma quantidade tão pequena quanto se queira.

As funções  $\phi$  para o problema (2.3.6) têm que satisfazer as condições (2.3.7) e devem ter necessariamente um grau de continuidade suficiente para fazer o lado esquerdo de (2.3.7) diferente de zero.

Substituindo (12.3.8) em (12.3.6) determina-se uma função erro  $\epsilon$ , chamada de residual, isto é:

$$\epsilon = \mathcal{L}_\Omega u - p \neq 0 \tag{3.1.9}$$



Note que  $\epsilon$  é igual a zero para a solução exata, mas não para uma solução aproximada. O residual é forçado à zero, no sentido médio, isto é, em média, por intermédio de um procedimento de zerar a integral ponderada do residual:

$$\int \epsilon \psi_i dx = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.10)$$

Onde  $\psi_i$  um conjunto de funções de ponderação, as quais são, também, parte de um conjunto completo e linearmente independente.

Assim procedendo, a solução converge para a solução exata, com o aumento do número de termos adotados.

NOTA: É bom lembrar que um conjunto infinito de funções ortogonais não é necessariamente completo, isto é, pode-se ter um número infinito de funções, mas a solução não converge para a solução exata. Para uma sequência de funções ser completa é necessário e suficiente que toda e qualquer subsequência desta seja uma sequência de Cauchy. Que converge para uma mesma função no espaço que as contém. Assim, um espaço métrico é completo quando todas as sucessões de Cauchy convergem para um limite que pertence ao espaço.

Seja o seguinte conjunto de funções  $\phi_k = \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \forall k = 1, 2, \dots, n$  e seja a solução.

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k$$

isso não permite que se reproduza a solução  $u = \text{constante}$ . Se a possibilidade de  $u$  ser constante existe, então há necessidade de termos na solução um termo que permita se reproduzir a solução desejada. Assim

$$u = \alpha_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k$$

que agora é um conjunto completo. Este exemplo ilustra a dificuldade que se tem em estabelecer a completude de um dado conjunto de funções.

A seguir serão apresentados alguns métodos baseados na ideia de ortogonalização. Neles, as funções de ponderação são escolhidas de modos diferentes. Considerar-se-á, em princípio, apenas operadores auto adjuntos e positivo-definidos por questões de simplicidade de apresentação dos



métodos, mas os mesmos se aplicam aos operadores de tipos mais gerais, o que serão vistos posteriormente.

### 3.4 MÉTODO DOS MOMENTOS.

Este método foi desenvolvido por H. Yamada em 1947 e H. Fujita em 1951 para aplicação a problemas de camada limite laminar e difusão transiente não linear, respectivamente. Como já mencionado anteriormente, as funções de ponderação  $\psi_i$  podem ser diferentes das funções de aproximação  $\phi_i$  pode ser usado.

Uma escolha simples é o conjunto LI e completo:

$$1, x, x^2, x^3, \dots \quad (3.1.11)$$

para problemas unidimensionais. Dessa forma, sucessivos momentos de ordem crescente do residual são forçados a zero assim:

$$\begin{aligned} \int \varepsilon \psi_j dx &= \int L u - p \psi_j dx = 0 \\ \therefore u &= \sum \alpha_i \phi_i \\ \psi_j &= x^j, \forall j = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

A técnica acima é denominada de **Método dos Momentos**, devido ao tipo de escolha feita para as funções de ponderação. Se qualquer outro conjunto for escolhido para as funções de ponderação não será mais o Método dos momentos, mas apenas um método de resíduo ponderado.

Exemplo

Seja  $\varepsilon = \diamond u - p = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$  em  $\Omega$ , sendo  $\Omega = 0, 1$ , com as seguintes condições de

contorno  $u(0) = u(1) = 0$ .

Seja a seguinte aproximação para a solução:

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots)$$

que satisfaz as condições de contorno dadas. Para efeito de cálculo considerar-se-á apenas os dois primeiros termos em  $\alpha$ , isto é:





$$u = x(1-x)\alpha_1 + \alpha_2 x$$

Logo a função residual será:

$$\varepsilon = u - p = x + (-2 + 39x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$$

Fazendo agora a ortogonalização do residual em relação às funções de ponderação 1 e x, tem-se respectivamente:

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot 1 dx = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot x dx = 0$$

integrando, obtém-se um sistema, que colocado na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} & \frac{11}{12} \\ \frac{11}{12} & \frac{19}{20} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$

cuja solução é:

$$\alpha_1 = \frac{122}{649}; \alpha_2 = \frac{110}{649}$$

Assim a função solução aproximada é  $u = x(1-x)\left(\frac{1}{649}\right)122 + 110x$

A solução exata do problema posto é  $u_{exata} = \left(\frac{\sin x}{\sin 1}\right) - x$

Usando o Mathcad se tem:



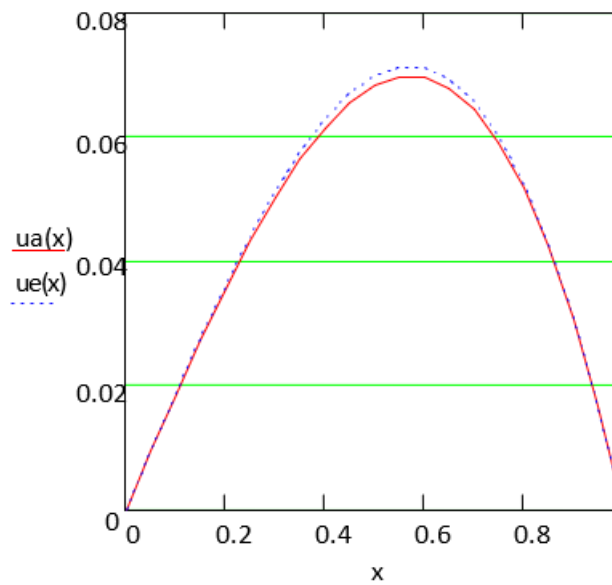
$x := 0, 0.05..1$

$$ua(x) := x \cdot (1 - x) \cdot \left(\frac{1}{649}\right) \cdot (122 + 110 \cdot x)$$

$$ue(x) := \left(\frac{\sin(x)}{\sin(1)}\right) - x$$

x =	ua(x) =	ue(x) =
0	0	0
0.05	$9.332 \cdot 10^{-3}$	$9.395 \cdot 10^{-3}$
0.1	0.018	0.019
0.15	0.027	0.028
0.2	0.036	0.036
0.25	0.043	0.044
0.3	0.05	0.051
0.35	0.056	0.057
0.4	0.061	0.063
0.45	0.065	0.067
0.5	0.068	0.07
0.55	0.07	0.071
0.6	0.07	0.071
0.65	0.068	0.069
0.7	0.064	0.066
0.75	0.059	0.06

Figura 2 Solução de  $u'' + u + x = 0$





### 3.5 MÉTODO DA COLOCAÇÃO

Este método apareceu na solução de equações diferenciais realizadas por J. C. Slater em 1934 e por J. Barta em 1937, respectivamente aplicada a solução de problemas de energia eletrônica em metais torque em peças prismáticas de seção quadrada. Foi posteriormente generalizado por R. A. Frazer (1937) e C. Lanczos (1938).

Este método consiste em anular a função residual  $\varepsilon$  em uma série de pontos escolhidos dentro do domínio de integração do problema. Deve-se notar que esses pontos são usualmente, mas não necessariamente, distribuídos no domínio.

Seja então a seguinte função de aproximação:

$$u = \sum \alpha_k \phi_k \quad (3.1.12)$$

onde  $\phi_k$  satisfaz as condições de contorno.

Seja agora determinar os valores de  $\alpha_k$ , forçando a condição:

$$\varepsilon = \mathcal{L} u - p = 0 \quad (3.1.13)$$

Seja  $\Delta$  a função delta de Dirac, função que é igual a zero se  $x \neq x_k$ , e  $\int_{x_k-c}^{x_k+c} \Delta(x_k) dx = 1$ ,

quando  $c \rightarrow 0$ . Dessa forma, pode-se escrever o método da colocação como uma técnica de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \Delta_k dx = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.14)$$

Exemplos

1. Seja resolver a equação diferencial  $\frac{d^2 u}{dx^2} + 4u - 4x = 0$ , em  $\Omega [0,1]$ . Considere  $x = 0,25$  e  $x = 0,5$ .

Solução

A – Seja  $u_1 = \alpha x - x^2$  função admissível tirada do conjunto admissível  $x^i, x^{i+1}$ , que são LI.

Usando  $u_1$  e fazendo  $\varepsilon|_{x=0,5} = 0$  tem-se.

$$\varepsilon|_{x=0,5} = \left[ -2 + 4x - x^2 \right] \alpha - 4x \Big|_{x=0,5} = 0$$



resolvendo encontra-se  $\alpha = -1$ , logo  $u = -1 \cdot x - x^2$

b) Seja agora  $u_2 = \alpha_1 x - x^2 + \alpha_2 x^2 - x^3$ . Fazendo  $\varepsilon|_{x=0,25} = 0 \wedge \varepsilon|_{x=0,5} = 0$ , tem-se

$$-1,7500\alpha_1 - 0,8125\alpha_2 = 2$$

$$-1,8125\alpha_1 + 0,5469\alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 = -0,7846 \wedge \alpha_2 = -0,7717$$

Logo,

$$u^{MC}_2 = -0,7846 x - x^2 - 0,7717 x^2 - x^3$$

que mostra que a solução aproximada, neste método, depende dos pontos de colocação. Usando Mathcad se tem:

Método da Colocação para a equação  $u'' + 4u - 4x = 0$

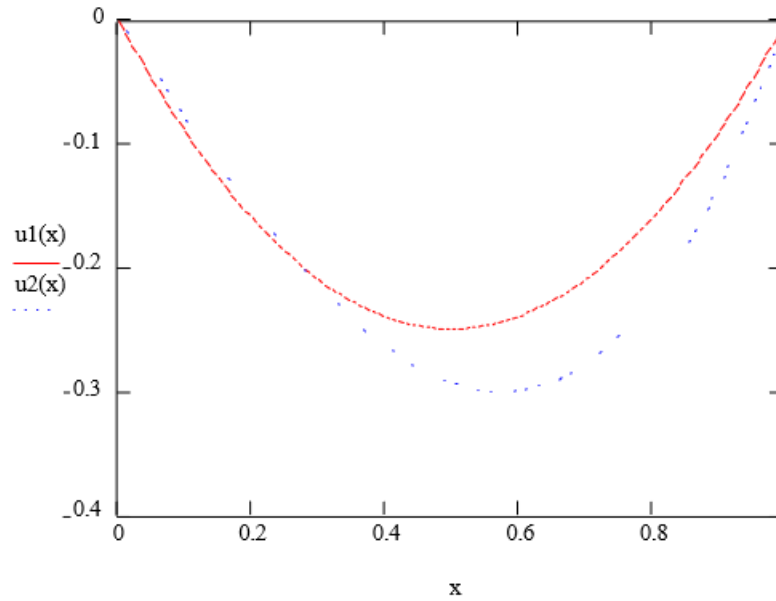
$$x := 0, 0.01 \dots 1$$

$$u1(x) := -(x - x^2)$$

$$u2(x) := -0.7846(x - x^2) - 0.7717(x^2 - x^3)$$



Figura 3 Solução de  $u''+4u-4x=0$  pelo método da Colocação



2. Seja resolver a seguinte equação diferencial de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n$$

com as seguintes condições de contorno:  $u_{x,y} = 0, \forall x = \pm a \wedge y = \pm b$ .

Solução

Seja a seguinte função de aproximação:

$$u = x^2 - a^2 - y^2 - b^2 \left[ \alpha_1 + \alpha_2 (x^2 + y^2) + \dots \right]$$

que é geral. Para simplificar o exemplo, seja considerar apenas o primeiro termo da soma, e uma região quadrada  $a = b$ . Dessa forma, tem-se:

$$u_1 = \alpha_1 (x^2 - a^2 - y^2 - a^2)$$

logo,

$$\epsilon = \diamond u - p = 2(y^2 - a^2) + x^2 - a^2 - \alpha_1 - p$$



Fazendo  $\varepsilon|_{x=y=0} = \varepsilon|_{x=y=a/2} = 0$  encontra-se:

$$\alpha_1 = -\left(\frac{19}{60}\right)\left(\frac{p}{a^2}\right); \alpha_2 = -\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{p}{a^2}\right)$$

Logo,

$$u_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \left[ \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{p}{a^2}\right) \left( -\left(\frac{19}{4}\right) - \left(\frac{1}{a^2}\right)(x^2 + y^2) \right) \right]$$

Solução no Mathcad:

$$a := 1 \quad b := 1 \quad p := 1$$

$$i := 1..20 \quad j := 1..2$$

$$x_i := -a + 0.05 \cdot i \cdot j \quad y_j := -b + 0.05 \cdot j$$

$$u1(x, y) := -\frac{p}{4 \cdot a^2} \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2)$$

$$u2(x, y) := -(x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \left[ 19 \cdot \frac{p}{60 \cdot a^2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{p}{a^4} \cdot (x^2 + y^2) \right]$$

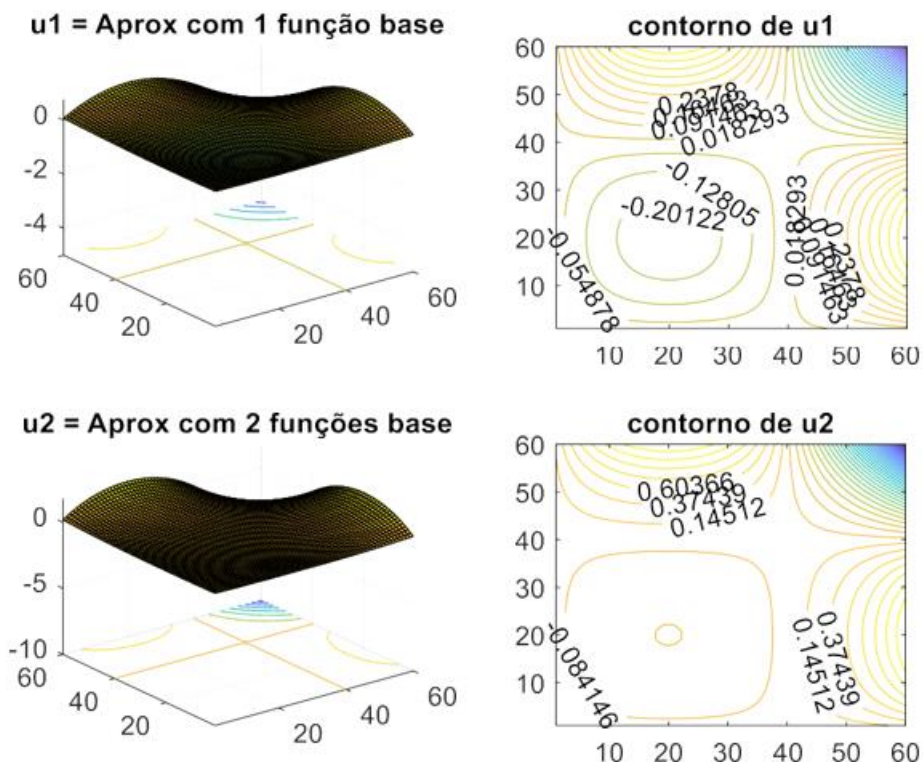
$$A_{i,j} := u1(x_i, y_j) \quad B_{i,j} := u2(x_i, y_j)$$



```
Solução em Matlab
function exemp2
% exemplo do capitulo 12 secao 12.3.5 método da colocação
clc;
global a b p
a = 1;
b = 1;
p = 1;
x = -a+0.05:0.05:2;
y = -b+0.05:0.05:2;
[~,~] = meshgrid(x,y);
[nx,~] = size(x');
[~,my] = size(y);
Z1 = zeros(nx,my);
Z2 = zeros(nx,my);
for i=1:nx
    for j=1:my
        Z1(i,j) = u1(x(i),y(j));
        Z2(i,j) = u2(x(i),y(j));
    end
end
figure(1)
surf(Z1);
figure(2)
surf(Z2);
figure(3)
contour(Z1,30,'ShowText','on')
figure(4)
contour(Z2,30,'ShowText','on')

function [A] = u1(X,Y)
    A = -p*(X^2-a^2)*(Y^2-b^2)/(4*a*a);
end
function [B] = u2(X,Y)
    B = -(X^2-a^2)*(Y^2-b^2)*(19*p/60*a^2+(1*p/15*a^4)*(X^2+Y^2));
end
end
```

Figura 4 solução par um e dois termos





### 3.6 MÉTODO DAS SUB-REGIÕES

Este método apareceu primeiramente em 1923 pelos engenheiros alemães C. B. Biezeno e R. Koch para a solução de problemas advindos da estabilidade de vigas e placas.

Este método é similar ao método da colocação descrito anteriormente, mas aqui em vez de zerar a função erro em determinados pontos, procura-se zerar a função residual sobre pequenas regiões do domínio, isto é, divide-se o domínio em pequenas regiões, anulando a integral do erro sobre cada região:

$$\int_{\Omega} \varepsilon d\Omega = 0 \quad (3.1.15)$$

para diferentes  $\Omega_i$  e com  $\bigcup \Omega_i = \Omega$  e mais  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Exemplo

Seja resolver  $\frac{d^2u}{dx^2} + 4u - 4x = 0$  em  $[0,1]$  dividindo o domínio em duas regiões.

$$\left\{ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \wedge \left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}.$$

Solução

Seja  $u_2 = \alpha_1 x - x^2 + \alpha_2 x^2 - x^3$ . Zerando a integral do resíduo em cada sub-região, tem-se:

$$\int_0^{1/2} \varepsilon dx = \int_0^{1/2} (4x^2 - 4x - 2\alpha_1 + 4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\alpha_2 - 4x) dx = 0$$
$$\int_{1/2}^1 \varepsilon dx = \int_{1/2}^1 (4x^2 - 4x - 2\alpha_1 + 4x^3 - 4x^2 - 6x + 2\alpha_2 - 4x) dx = 0$$

que resolvendo, encontra-se:

$$\alpha_1 = -0,44230$$

$$\alpha_2 = -0,61538$$

Logo a função de aproximação, pelo método das sub-regiões, é:





$$u^{SR}_2 = -0,44230 x - x^2 - 0,61538 x^2 - x^3$$

### 3.7 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Este método apareceu em 1795 com o matemático Johann Carl Friedrich Gauss quando do estudo de estimação de ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados.

Neste método, as funções de ponderação  $\psi_i$  são escolhidas como sendo:

$$\psi_i = \mathcal{L} \phi_i \quad (3.1.16)$$

Onde  $\phi_i$  são funções LI e parte de um conjunto completo. Seja então  $\diamond u = p$  sendo  $u_1$  uma função aproximação de  $u$ , com

$$u_1 = \sum \alpha_i \phi_i \quad (3.1.17)$$

logo o residual será:

$$\varepsilon = \mathcal{L} u_1 - p \quad (3.1.18)$$

Como devemos ter o produto interno entre o residual  $\varepsilon$  e as funções de ponderação iguais a zero no domínio, tem-se:

$$\varepsilon, \psi_i = \int_{\Omega} \varepsilon \psi_i d\Omega \quad (3.1.19)$$

como as funções  $\psi_i = \mathcal{L} \phi_i$ , substituindo na expressão acima, e resolvendo vem:

$$\begin{aligned} \varepsilon, \psi_i &= \mathcal{L} u_1 - p, \psi_i = \mathcal{L} \sum \alpha_i \phi_i - p, \mathcal{L} \phi_i \\ &= \alpha_i \mathcal{L} \phi_i, \mathcal{L} \phi_i - p, \mathcal{L} \phi_i = 0 \end{aligned}$$

Como,  $\mathcal{L} \phi_i, \mathcal{L} \phi_i = \int \mathcal{L} \phi_i \mathcal{L} \phi_i = \|\mathcal{L} \phi_i\|^2$  tem-se:

$$\alpha_i \|\mathcal{L} \phi_i\|^2 - p, \mathcal{L} \phi_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.20)$$

$\psi$



## Exemplo

Seja resolver o mesmo problema exemplo da seção anterior, isto é, resolver  $\frac{d^2u}{dx^2} + 4u - 4x = 0$  em  $[0,1]$ .

Solução:

Seja  $u_2 = \alpha_1 x - x^2 + \alpha_2 x^2 - x^3 \therefore \phi_1 = \alpha_1 x - x^2, \phi_2 = \alpha_2 x^2 - x^3$ , logo

$$\begin{aligned}\alpha_1 \|L \phi_1\|^2 - p, L \phi_1 &= 0 \\ \alpha_2 \|L \phi_2\|^2 - p, L \phi_2 &= 0\end{aligned}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{110}{101}; \\ \alpha_2 = -\frac{399}{449} \end{cases}$$

$$e \quad u_2^{MQ} = -\left(\frac{110}{101}\right) x - x^2 - \left(\frac{399}{449}\right) x^2 - x^3$$

Comparando  $u_2^{MC}$  (solução pelo método da colocação), com  $u_2^{SR}$  (do exemplo da seção anterior, pelo método das sub-regiões) e  $u_2^{MQ}$  (solução pelo método dos mínimos quadrados), se tem:

$$u_2^{MC} = -0,7846 x - x^2 - 0,7717 x^2 - x^3$$

$$u_2^{SR} = -0,44230 x - x^2 - 0,61538 x^2 - x^3$$

$$u_2^{MQ} = -\left(\frac{110}{101}\right) x - x^2 - \left(\frac{399}{449}\right) x^2 - x^3$$

Fazendo uso de um pequeno procedimento em Matlab:



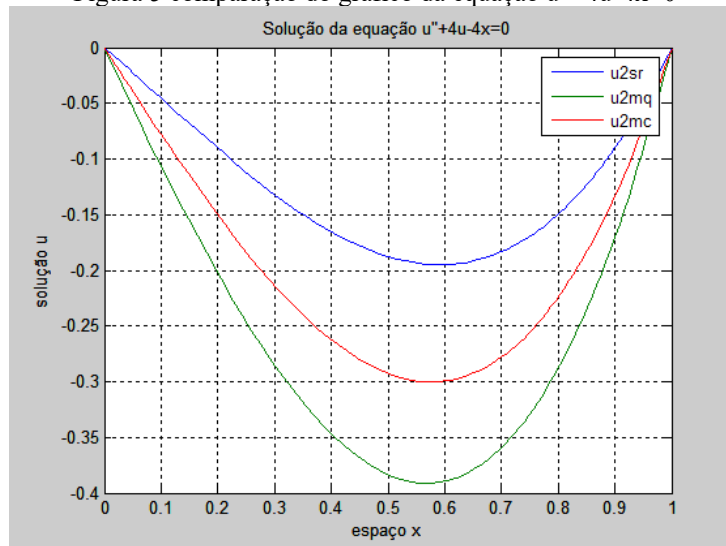
```
clear;clc;
% função auxiliar do ODE solver ode45
vdu = @(x,y) [y(2); -4*y(1)-4*x]; % u1' = u2
% u2' = -4u1 - 4x
% solução pelo método da colocação
u2mc = @(x)-0.7848*(x-x^2)-0.7717*(x^2-x^3);

% solução pelo método das sub-regiões
u2sr = @(x)-0.4430*(x-x^2)-0.61538*(x^2-x^3);

% solução pelo método dos mínimos quadrados
u2mq = @(x)-(110/101)*(x-x^2)-(399/449)*(x^2-x^3);

% plotar as funções
fplot(@(x) [-0.4430*(x-x^2)-0.61538*(x^2-x^3), ...
-(110/101)*(x-x^2)-(399/449)*(x^2-x^3), ...
-0.7846*(x-x^2)-0.7717*(x^2-x^3)], [0,1]); grid on;hold on;
title('Solução da equação u''+4u-4x=0');
xlabel('espaço x');
ylabel('solução u');
legend('u2sr','u2mq','u2mc');
```

Figura 5 comparação do gráfico da equação  $u''+4u-4x=0$



A solução da equação diferencial encontrada utilizando-se do Matlab com uso da função `bvp4c` é a mostrada no procedimento abaixo (comentado para facilitar o entendimento do leitor) e cujo resultado é apresentado na figura 2:

```
function mat4bvp_mod
%MAT4BVP_MOD Acha a solução da equação:
%
%      u'' + 4u - 4x = 0
%
% sobre o intervalo [0, 1] com as seguintes condições de contorno:
%      u(0) = 0, u(1) = 0
%
% Primeiramente se utiliza a função bvpinit para se determinar uma
% condição inicial para se poder resolver o problema de valores
```



```
% decontorno pelo solver bvp4c.
% solinit = bvpinit(x,yinit) onde x é um vetor que especifica
% uma malha inicial e yinit é em geral uma função com os
% valores iniciais de y nas abscissas x.

clc;
solinit = bvpinit(linspace(0,1,21),@mat4init);

% solinit.x      % mesh dada por linspace acima
% sol.x          Malha selecionada por bvp4c
% sol.y          Aproximação para y(x) nos pontos da malha de sol.x
% sol.parameters Valores retornados por bvp4c para parametros
% desconhecidos, se existirem
% sol.solver     'bvp4c'
% Se queremos resolver o problema de valores de contorno (BVP)
% sobre [a,b], então especificamos x(1) como 'a' e x(end)
% como 'b', e colocamos isso num vetor coluna que pode
% ser referenciado por uma função 'bcfun'
sol = bvp4c(@mat4ode,@mat4bc,solinit);

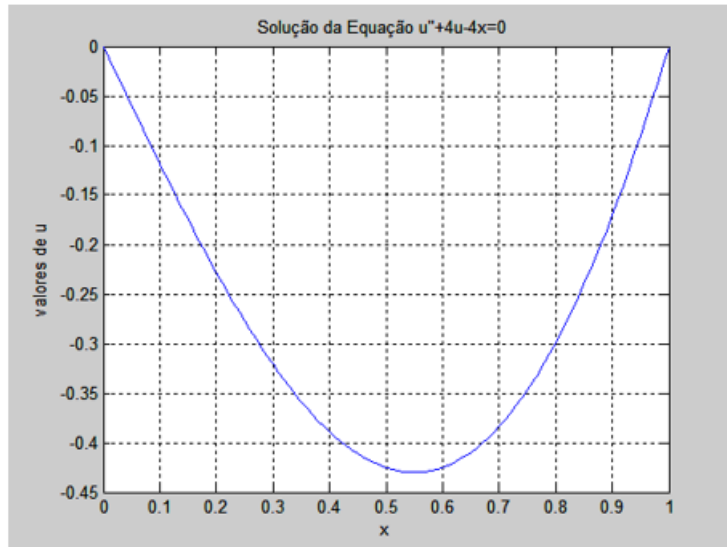
% Agora se pode listar ou plotar os valores da solução nos pontos
% da malha entre os pontos do intervalo definido.
% Em geral, a solução aproximada S(x) é contínua e tem
% derivadas contínuas. Pode-se utilizar a função
% DEVAL para avaliar bastante pontos para se ter um gráfico suave.

xint = linspace(0,1,101);
Sxint = deval(sol,xint);

%Sxint(1,:) = valor da solução em x = Sxint(2,:)
figure;
dydx = [ y(2)          % u'' = y'  <=> y(1) = y(2)
% -----
function res = mat4bc(ya,yb)
res_ = [ ya(1)          % ya(1) = y'(a) --> ya(1) = 0
yb(1) ];          % yb(1) = y'(b) --> yb(1) = 0
%
```



Figura 6 gráfico da solução de  $u''+4u-4x=0$  pelo solver bvp4c do matlab



### 3.8 MÉTODO DE GALERKIN

Devido a importância do método de Galerkin, deixa-se de descrevê-lo aqui, para se abrir uma seção somente para discuti-lo. Isso será feito na próxima seção.

## 4 O MÉTODO DE GALERKIN

### 4.1 GERAL

O Método de Galerkin é um caso particular do método dos resíduos ponderados, no qual as funções de ponderação  $\psi_i$  são as mesmas que as funções de aproximação  $\phi_i$ .

Este método aproxima a solução de um dado conjunto de equações diferenciais e de suas condições de contorno pela substituição nelas de uma ou mais funções de verificação, as quais, em princípio, satisfazem às condições de contorno. Como as funções de verificação são, em geral, diferentes da solução exata, o conjunto das equações produz alguns resíduos. Esses resíduos são então ponderados pelos modos de solução aproximada e feitos iguais a zero, sobre o domínio.

Seja então, o sistema de equações:

$$\varepsilon|_{\Omega} = \dots u_1 - p = 0 \quad (4.1.1)$$

com as condições de contorno essenciais e naturais  $\diamond u|_{\Gamma} = g$ ,  $\diamond u|_{\Gamma} = q$  sobre  $\Gamma$ , onde  $\dots, \diamond, \diamond$  podem ser operadores diferenciáveis, integrais, integro-diferenciáveis, etc.

Seja  $u_1$  uma função de aproximação que satisfaz as condições de contorno e formado pela combinação de funções  $\phi_i$  completo:



$$u_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad (4.1.2)$$

com resíduo

$$\varepsilon|_{\Omega} = \dots u_1 - p = \dots \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) - p \quad (4.1.2)$$

que deve ser ortogonalizado com relação à mesma função de aproximação  $\phi_k$ , isto é:

$$\varepsilon, \phi_k = \int_{\Omega} \varepsilon \phi_k d\Omega = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.3)$$

Se o operador é linear, a equação acima produz um sistema de equações lineares do qual se pode obter os coeficientes  $\alpha_k$ :

$$\varepsilon, \phi_k = \int_{\Omega} \dots \phi_i \phi_k d\Omega = \int_{\Omega} p \phi_k d\Omega, \forall i, k = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.4)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{A}\alpha = p \quad (4.1.5)$$

É claro que a função de aproximação  $u_1$  pertence ao espaço  $H$  gerado pelas funções  $\phi_i \in H$

Dessa forma, o Teorema de Lax-Milgram estabelece o critério de convergência do processo.

Antes de enunciá-lo, precisa-se definir o que é um operador diferencial limitado e um operador diferencial coercivo.

Definição: Um operador diferencial linear é dito ser operador limitado se existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \mathcal{L} v, w \right| \leq \delta \|v\|_H \times \|w\|_H, \quad \forall v, w \in H$$

$$\therefore \|v\|_H = \left[ \|v\|^2 + \dots v, v \right]^{1/2} \quad (4.1.6)$$

Definição: Um operador diferencial linear é dito ser operador coercivo se existe um  $\kappa > 0$  tal que

$$\left| \dots v, v \right| \leq \kappa \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H$$

$$\therefore \|v\|_H = \left[ \|v\|^2 + \dots v, v \right]^{1/2} \quad (4.1.7)$$



Teorema: (Lax-Milgram). Seja  $\mathcal{L}$  um operador diferencial linear limitado e coercivo; seja  $V$  um subespaço de  $\mathcal{H}$ . Então existe um único  $u_1$  pertencente a  $V$  tal que

$$\dots \langle u_1 - p, v \rangle = 0, \quad v \in V \quad (4.1.8)$$

e mais,

$$\dots \langle u_1 - p, v \rangle = 0, \quad v \in V \quad (4.1.9)$$

Onde  $\phi_0 \in \mathcal{H}$  é arbitrário e  $u$  é uma solução fraca  $\dots \mathcal{L}u = p$  de com  $x \in \Omega$  em  $\mathcal{H}$ .

Definição: A desigualdade (12.4.10) que aparece no teorema de Lax-Milgram é denominada de **Lema de Céa**:

$$\|u_1 - u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\delta}{\kappa} \inf_{v \in \phi_0 + V} \|v - u\|_{\mathcal{H}}$$

Exemplos

1. Resolver a equação  $\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$  em  $[0,1]$  e com as condições  $u(0) = u(1) = 0$ .

Solução

Como a função de aproximação tem que satisfazer as condições de contorno, tem-se:

$$u^* = x(1-x) \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots$$

Seja como primeira aproximação  $u_1 = x(1-x) \alpha_1 + \alpha_2 x$ , onde

$$\int_0^1 \varepsilon \phi_k dx = 0 \quad \therefore \varepsilon = \mathcal{L}u - p, \quad \text{com} \begin{cases} \phi_1 = x(1-x) \\ \phi_2 = x^2(1-x) \end{cases}$$

Logo



$$\int_0^1 \varepsilon \cdot \phi_1 dx = \int_0^1 \varepsilon \cdot x \cdot (1-x) dx = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot \phi_2 dx = \int_0^1 \varepsilon \cdot x^2 \cdot (1-x) dx = 0$$

Integrando, encontra-se:

$$\alpha_1 = \frac{71}{369};$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{41};$$

que gera

$$u_1 = x(1-x) \left( \frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right)$$

Comparação da Solução pelo Método de Galerkin e dos Momentos e Exata

$x := 0,0 + 0,05 \cdot 1$

Solução pelo Método dos Momentos  $y_2(x)$ :

Solução pelo Método de Galerkin  $y_g(x)$ :

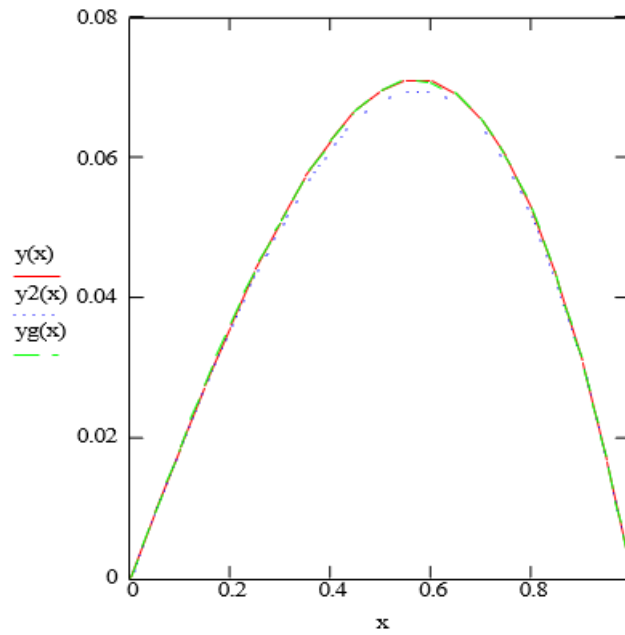
Solução Exata  $y(x)$ :

$$y_2(x) := x \cdot (1-x) \cdot \left( \frac{122}{649} + \frac{110}{649}x \right) \quad y_g(x) := x \cdot (1-x) \cdot \left( \frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right) \quad y(x) := \frac{\sin(x)}{\sin(1)} - x$$





Figura 7



x =	y2(x) =	yg(x) =	y(x) =
0	0	0	0
0.05	$9.332 \cdot 10^{-3}$	$9.545 \cdot 10^{-3}$	$9.395 \cdot 10^{-3}$
0.1	0.018	0.019	0.019
0.15	0.027	0.028	0.028
0.2	0.036	0.036	0.036
0.25	0.043	0.044	0.044
0.3	0.05	0.051	0.051
0.35	0.056	0.057	0.057
0.4	0.061	0.063	0.063
0.45	0.065	0.067	0.067
0.5	0.068	0.069	0.07
0.55	0.07	0.071	0.071
0.6	0.07	0.071	0.071
0.65	0.068	0.069	0.069
0.7	0.064	0.066	0.066
0.75	0.059	0.06	0.06

Encontrar uma solução para a equação de Poisson  $\nabla^2 u = p$  com as seguintes condições de contorno:  
 $u(-a) = u(a) = u(-b) = u(b) = 0$ , em uma região retangular  $[-b,b] \times [-a,a]$ .

Solução:

Para mostrar o método aplicando diversos conjuntos  $\phi_i$ , apresentar-se-á uma solução polinomial e depois outra trigonométrica.



Seja  $u = \alpha (x^2 - a^2 - y^2 + b^2)$

Então  $\delta u = \delta \alpha (x^2 - a^2 - y^2 + b^2)$

E  $\varepsilon = \nabla^2 u - p = 2\alpha (y^2 - b^2) + 2\alpha (x^2 - a^2) - p$ .

Logo

$$\varepsilon, \phi_k = \int_{\Omega} \varepsilon \phi_k d\Omega = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon \phi_k d\Omega = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varepsilon \delta u dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [\nabla^2 u - p] \delta u dx dy = 0$$

substituindo  $u$  na expressão acima, sabendo-se que  $\phi_1 = u$

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b [2\alpha (y^2 - b^2) + 2\alpha (x^2 - a^2) - p] \cdot \alpha (y^2 - b^2 - x^2 + a^2) dx dy = 0$$

e integrando, obtém-se  $\alpha = \frac{5}{8} \left( \frac{p}{a^2 + b^2} \right)$

logo

$$u = \frac{5}{8} \left( \frac{p}{a^2 + b^2} \right) (y^2 - b^2 - x^2 + a^2)$$

Seja então a solução polinomial determinada:

$$u = (5/8)[p/(a^2+b^2)] (x^2-a^2)(y^2-b^2).$$

Vamos considerar a=1, b=1 e p variando

`a :- 10 b :- 10`

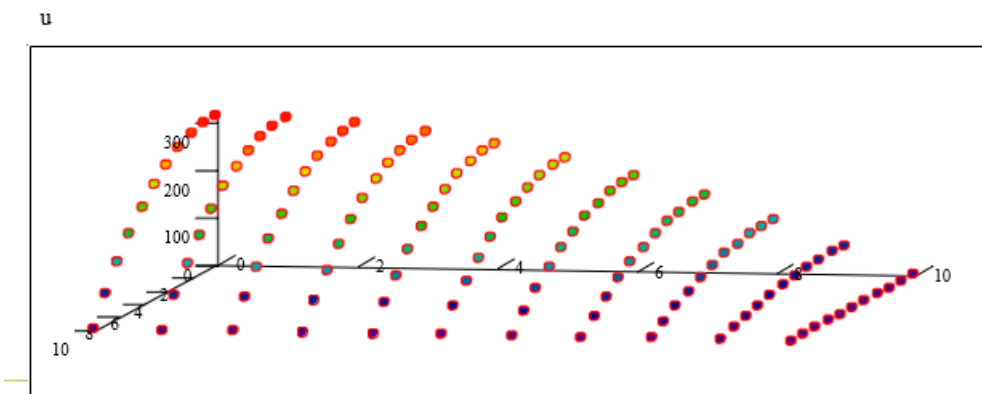
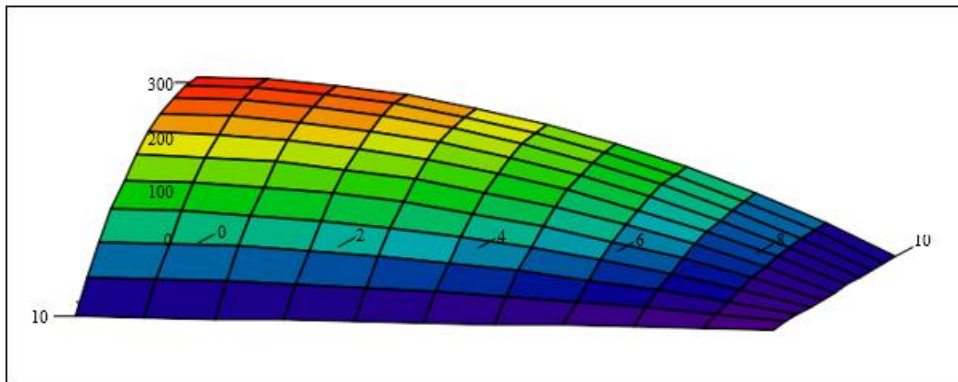
`p :- 10`

`x :- 0..a y :- -0..b`



$$u_{x,y} := \left(\frac{5}{8}\right) \cdot \left[\frac{p}{(a^2 + b^2)}\right] \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	312.5	309.375	300	284.375	262.5	234.375	200	159.375	112.5
1	309.375	306.281	297	281.531	259.875	232.031	198	157.781	111.375
2	300	297	288	273	252	225	192	153	108
3	284.375	281.531	273	258.781	238.875	213.281	182	145.031	102.375
4	262.5	259.875	252	238.875	220.5	196.875	168	133.875	94.5
5	234.375	232.031	225	213.281	196.875	175.781	150	119.531	84.375
6	200	198	192	182	168	150	128	102	72
7	159.375	157.781	153	145.031	133.875	119.531	102	81.281	57.375



$$u = \sum_k \sum_j \alpha_{jk} \cos\left(\frac{k\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

B- Seja agora

função que satisfaz as condições de

contorno e pertence a um conjunto LI, isto é:



$$\int_{-a}^a \cos\left(\frac{k\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{2b}\right) = a \delta_{jk}$$

Fazendo  $\phi_k = \cos\left(\frac{k\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{2b}\right)$ , então o produto interno,  $\langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0$  ou seja.

$$\int_{\Omega} \phi \nabla_{2u} - p \phi \, d\Omega = 0$$

Substituindo as expressões das funções dadas, integrando e resolvendo tem-se:

$$\alpha_{kj} = \frac{64a^2b^2p}{\pi^4kj(k^2b^2 + j^2a^2)}$$

logo, a solução procurada é:

$$u = \sum_k \sum_j \left\{ \left[ \frac{64a^2b^2p}{\pi^4kj(k^2b^2 + j^2a^2)} \right] \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{2b}\right) \right\}$$

Seja então a solução polinomial determinada:

$$u_{x,y} := \sum_{k=1}^z \sum_{j=1}^z \left[ \frac{(64 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot p)}{\pi^4 \cdot k \cdot j \cdot (k^2 \cdot b^2 + j^2 \cdot a^2)} \right] \cdot \left( \cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{2 \cdot a}\right) \cdot \cos\left(j \cdot \pi \cdot \frac{y}{2 \cdot b}\right) \right)$$

Vamos considerar a=10, b=10 e p=10 . Seja a solução em Mathcad abaixo:



$\pi := 3.141$

$a := 10 \quad b := 10 \quad p := 10$

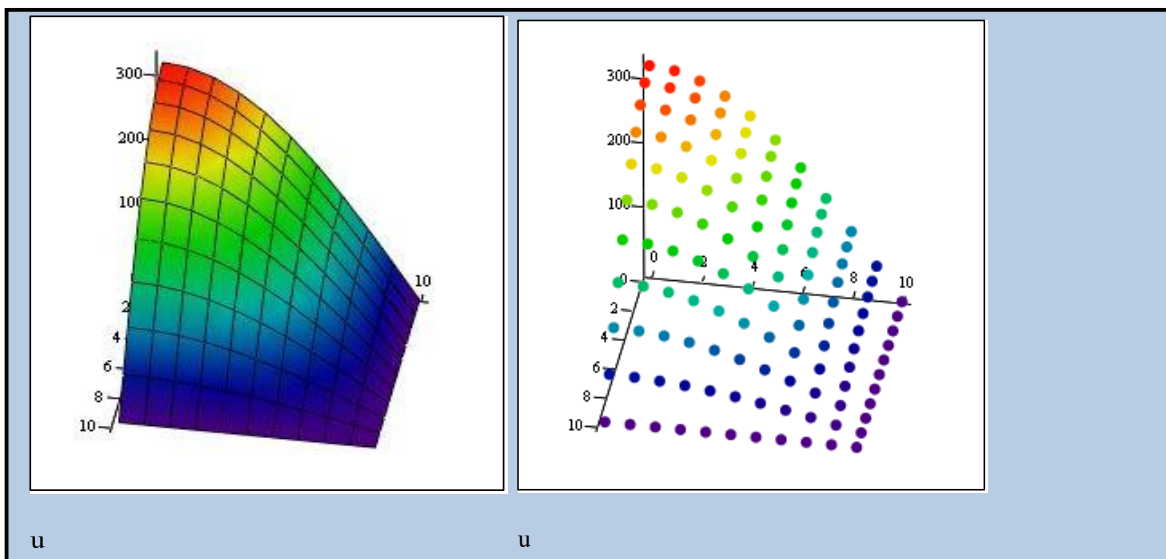
$x := 0..a \quad y := 0..b$

$z := 1$

$$u_{x,y} := \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \left[ \frac{(64 \cdot \frac{z}{a} \cdot \frac{z}{b})}{\pi^4 \cdot k \cdot j \cdot (k^2 \cdot b^2 + j^2 \cdot a^2)} \right] \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{2 \cdot a}\right) \cdot \cos\left(j \cdot \pi \cdot \frac{y}{2 \cdot b}\right)$$

	0	1	2	3	4
0	328.55	324.505	312.471	292.742	265.806
1	324.505	320.51	308.624	289.139	262.534
2	312.471	308.624	297.178	278.415	252.798
3	292.742	289.139	278.415	260.837	236.837
4	265.806	262.534	252.798	236.837	215.045
5	232.325	229.465	220.955	207.005	187.958
6	193.124	190.747	183.673	172.076	156.243
7	149.168	147.332	141.868	132.911	120.681
8	101.539	100.289	96.57	90.473	82.148
9	51.41	50.777	48.894	45.807	41.592
10	0.015	0.015	0.014	0.014	0.012

$u =$



u

u

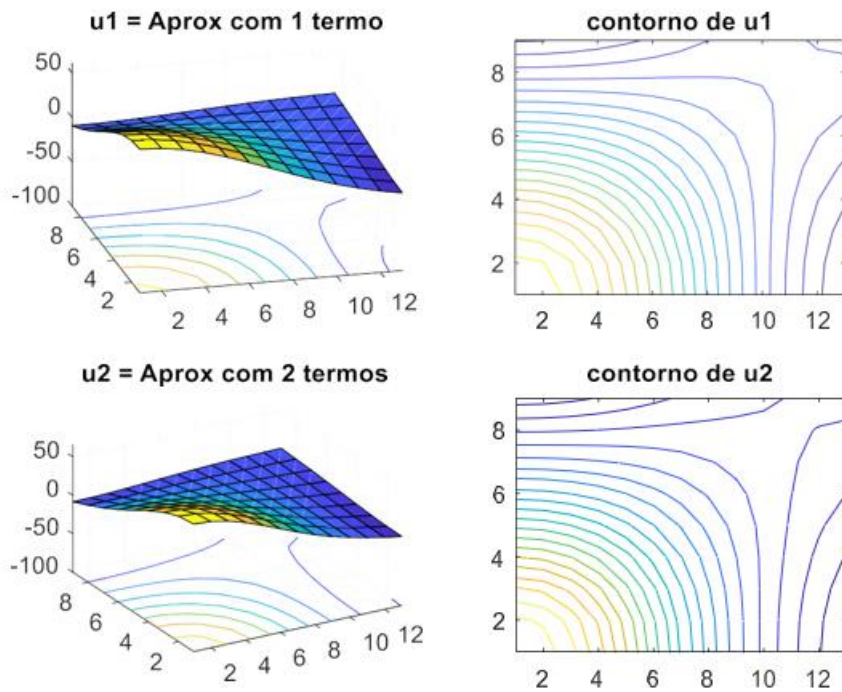


Uma solução em Matlab é dada a seguir para o problema b): com  $a=4$ ;  $b=6$  e  $p=5$ , com um passo  $h=0.5$ , gerando 8 pontos na direção  $x$  e 12 pontos na direção  $y$ .

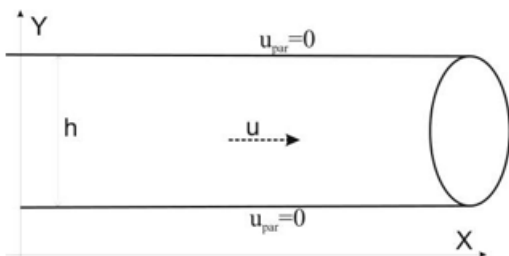
```
function exemp2b_mg
% exemplo 2b do capítulo 12 seção 12.4 método de Galerkin \nabla^2u=p
% em uma região retangular {|-b,b| x |-a,a|}
% face simetria, solução em {|0,b| x |0,a|}
clc;
global a b p
disp('Valores Default: a=b=p=10');
a = input('Entre com a dimensão x: ');
if a ==0
    a = 10;
end
b = input('Entre com a dimensão y: ');
if b == 0
    b = 10;
end
p = input('Entre com o termo independente: ');
if p == 0
    p = 10;
end
x = 0:0.5:a;
y = 0:0.5:b;
[~,~] = meshgrid(x,y);
[nx,~] = size(x');
[~,my] = size(y);
Z1 = zeros(nx,my);
Z2 = zeros(nx,my);
for ix=1:nx
    for iy=1:my
        Z1(ix,iy) = uxy(x(ix),y(iy),3);
        Z2(ix,iy) = uxy(x(ix),y(iy),4);
    end
end
Z1
Z2
figure(1);
subplot(2,2,1),
surfc(Z1), title('u1 = Aprox com 1 termo')
```

```
subplot(2,2,3)
surfc(Z2),title('u2 = Aprox com 2 termos')
subplot(2,2,2)
%   contour(Z1,20,'ShowText','on'),title('contorno de u1')
contour(Z1,20),
title('contorno de u1')
subplot(2,2,4)
contour(Z2,20),
title('contorno de u2')

function [A] = uxy(X,Y,n)
    aux1 = 64*(a^2)*(b^2)*p;
    A = 0;
    for k=1:n
        for j=1:n
            aux2 = (pi^4)*k*j*((k^2)*(b^2)+(j^2)*(a^2));
            aux3 = cos(k*pi*X/(2*a))*cos(j*pi*Y/(2*b));
            A = A + aux1*aux3/aux2;
        end %for j
    end % for k
    % A(X,Y)
end % function uxy
end
```



c. Seja agora considerar o caso do fluxo num canal de profundidade unitária quando a velocidade na direção  $y$  é zero ( $v = 0$ )



A equação de continuidade é:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  Como a viscosidade do líquido  $\nu = 0$  apenas  $u = u(y)$

Para fluxo laminar confinado e convecção forçada, a equação de momento na direção  $x$  é:

$$\rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Com  $u_x = v_y = 0$ , logo



$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

integrando duas vezes em relação a  $y$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} && \text{original} \\ -h &= -\frac{\partial p}{\partial x} y + \mu \frac{\partial u}{\partial y} && \text{1ª integração em } y \\ -hy &= -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \mu u && \text{2ª integração em } y \\ &\text{arrumando, se tem} \\ u &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) \end{aligned}$$

que define o fluxo entre placas paralelas, chamado de fluxo de Poiseville.

Usando o método de Galerkin, se tem:

$$\int_0^h \left\{ -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \delta u \delta y = 0$$

Sendo  $u$  da forma  $u = a \cdot \sin(\pi y / h)$  então  $\delta u = \sin(\pi y / h)$  que levando a integral acima e realizando-a, encontra-se:

$$a = -\frac{4 \cdot h^2}{\pi^3 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

Que produz a seguinte função

$$u = -\frac{4 \cdot h^2}{\pi^3 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \sin \left( \frac{\pi \cdot y}{h} \right)$$

Análise

Os métodos dos resíduos ponderados apresentados são de difícil aplicação na prática, por





causa de que as funções tentativas precisam satisfazer todas as condições de contorno - essenciais e naturais. As funções precisam preencher estes requerimentos porque utilizam a minimização do erro para satisfazer a equação diferencial do equilíbrio

## Exercícios

1 - Considere a forma auto adjunto da equação não homogênea de Bessel

$$x^2 y'' + y' + (x^2 - 1) (y/x) = -x^2, \text{ com } 1 \leq x \leq 2$$

com  $y(1) = y(2) = 0$ . Determine uma aproximação de  $y$  pelo método de:

Galerkin

Colocação

Momentos

Mínimos

Quadrados

Compare as soluções

2 - A extensão de uma placa quadrada sob força unitária aplicada nas bordas, reduz a solução da equação biarmônica  $\nabla^4 u = 0$ . Dado um quadrado de lado igual a 2, com as seguintes condições de contorno  $u_{xy} = u_{yx} = u_{xx} = 0$  e  $u_{yy} = 11 - y^2$ . Além disso, nos contornos  $x = 1$  e  $y = 1$

a - Mostre que o funcional correspondente é  $J = \int_{\Omega} \left[ \nabla^2 u^2 - 4u \right] dx dy$

b - Verifique que as funções de forma apropriadas são definidas por:

$$\Phi_n(x,y) = x^2 - y^2, y^2 - 1, 1, x^2 y^2, \dots$$

c - Use o método de Galerkin, com um único coeficiente e mostre que a solução é próxima da obtida pelo método de Rayleigh-Ritz:

$$u_1(x,y) \approx 0,04253 (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2$$

3 - Para a deformação de uma viga sobre uma base elástica em variáveis adimensionais é:



$u^{iv} + u = 1$  com  $u = u'' = 0$  para deflexão zero e momento fletor zero nas bordas  $x = 0$  e  $x = 1$ .

Escolha as funções de forma  $\sin \pi y, \sin 3\pi x$  para achar uma solução aproximada.

4 - O problema não linear  $\frac{d}{dx} [k(u) \cdot \frac{du}{dx}] = 0$  em  $0 \leq x \leq 1$ , representa a condução de calor em estado estacionário numa placa com condutividade  $k u$  e temperatura adimensional nos contornos de  $u(0) = 0$  e  $u(x=1) = 1$ . Para  $k u = 1 + u$  funções de aproximação de forma polinomial  $1, x, x^2$ , calcule o residual e a função aproximada por cada método de resíduos ponderados apresentado. Compare a solução encontrada com a solução exata  $u(x) = 1 + 3x^{1/2} - 1$ .

5- Seja determinar a deflexão em um cabo de  $L = 10m$ , com  $g = 9,8 m/s^2$ ,  $\rho = 1 kg/m$ , e  $T = 98 N$ , nas posições  $L/2$  e  $L/4$ . A equação que rege o problema é:  $-\frac{d}{dx} (T \cdot \frac{du}{dx}) = -\rho \cdot g$ ,  $0 \leq x \leq L$ .

a - Use o método de Galerkin, usando  $\Phi_1(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ .

b - Use o método de Galerkin, usando  $\Phi_2(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ .

c - Use o método de Galerkin, usando:  $\Phi_3(x) = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + a_3 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)$ .

6- No problema anterior, incluindo o termo devida a fundação elástica, a equação fica

$-\frac{d}{dx} (T \cdot \frac{du}{dx}) + ku = -\rho \cdot g$  com  $k=24,5 N/m.m =$  rigidez da fundação. Use funções de forma

polinomiais do tipo  $\Phi_n = a_1 x + \dots + a_n x^n, n = 1, 2, \dots, n$ , compare os valores encontrados com a solução exata:

$$u(x) = 0.4 \cdot \left( \frac{\text{sen}(L/2 - x/2) + \text{senh}(x/2)}{\text{senh}(L/2)} \right)$$

## 4.2 MÉTODO DE GALERKIN COM POLINÔMIOS CONTÍNUOS POR PARTE

Quando as funções de aproximação  $\phi$  são polinômios contínuos por partes sobre  $\Omega$ . Como na definição do método seja o sistema de equações:

$$\varepsilon|_{\Omega} = \dots u_1 - p = 0 \tag{4.2.1}$$

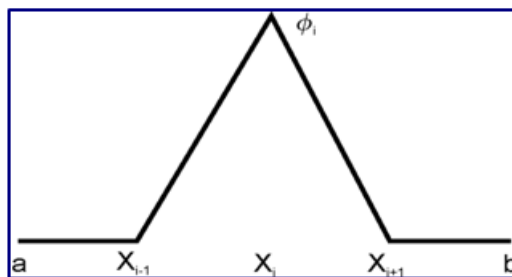


com as condições de contorno essenciais e naturais  $\mathcal{G} u|_{\Gamma} = g$ ,  $\mathcal{S} u|_{\Gamma} = q$  re  $\Gamma$ , onde, como já visto acima, diferenciáveis, etc.

Seja  $u_I$  uma função de aproximação que satisfaz as condições de contorno e formado pela combinação de funções  $\phi_i$  ortogonais a um conjunto linearmente independente e completo e mais, sendo contínuas por parte definida sobre  $\Omega$ . Sem perda de generalidade, pode-se considerar  $\Omega = [0, 1]$ . Seja então uma partição  $\mathbb{P}_{\Omega_n} : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = 1$  subintervalo  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  nto, de modo que  $h_j = x_j - x_{j-1}$ .  $\Omega = \cup_{i=1}^m \Omega_i$   $\phi_i^h(x) | x \in \mathbb{P}_{\Omega_n}$ .

Pode-se mostrar que  $\Omega_n$  é um espaço vetorial finito de dimensão  $m$  cuja base é formada pelas funções  $\phi_i$   $i=1, \dots, m$ .

Figura 8 função contínua por parte em  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$



No processo normal, todas as

$$u_I = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \tag{4.2.2}$$

com resíduo

$$\varepsilon|_{\Omega} = \dots u_I - p = \dots \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) - p \tag{4.2.3}$$

que deve ser ortogonalizado com relação à mesma função de aproximação  $\phi_k$ , isto é:

$$\varepsilon, \phi_k = \int_{\Omega} \varepsilon \phi_k d\Omega = 0, \forall k = 1, 2, \dots, n \tag{4.2.3}$$

Se o operador  $\dots$  é linear, a equação acima produz um sistema de equações lineares do qual se pode obter os coeficientes  $\alpha_k$ :

$$\varepsilon, \phi_k = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i - p \right) \phi_k d\Omega = \int_{\Omega} p \phi_k d\Omega, \forall i, k = 1, 2, \dots, n \tag{4.2.4}$$



Com

$$\begin{aligned} \phi_i, \phi_k &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_k d\Omega, \quad \forall i, k = 1, 2, \dots, n \\ p \phi_k &= \int_{\Omega} p \phi_k d\Omega, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ou na forma matricial  $\mathbf{A}\alpha = p$  que pode ser resolvida por um método apresentado no volume 1 desta obra.

$$\mathbf{A}\alpha = p \rightarrow \begin{cases} \alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T \\ p = [p \ \phi_1 \ p \ \phi_2 \ \dots \ p \ \phi_n]^T \\ A = \begin{bmatrix} \phi_1, \phi_1 & \phi_2, \phi_1 & \dots & \phi_n, \phi_1 \\ \phi_1, \phi_2 & \phi_2, \phi_2 & \dots & \phi_n, \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1, \phi_n & \phi_2, \phi_n & \dots & \phi_n, \phi_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

## 5 ESCOLHA DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO

Quando usando a MRP em qualquer de suas variantes uma das coisas mais importante é a escolha adequada das funções de aproximação. Esta escolha dá a importância e o poder do método, em que as informações conhecidas do problema são incorporadas nas soluções aproximadas. Em aproximações de baixa ordem ou com uso de poucas funções de aproximação, uma boa escolha influencia o resultado, no entanto, em casos de aproximação de alta ordem essa influência é minimizada sendo essa influência substituída pela ordem de convergência numérica desejada. Assim, a taxa de convergência passa a ser preponderante.

Dessa forma, o passo inicial é escolher um conjunto de funções de aproximação que satisfaça o maior número de condições de contorno do problema, observando que esse conjunto de funções precisa ser linearmente independente e completo. Em geral, os polinômios são completos e LI, pois qualquer função pode ser expandida em termos daqueles.

A condição de completude do conjunto de funções assegura que a solução pode ser expressa com um número de termos suficiente para tal.

Existem duas condições imprescindíveis para a escolha adequada do conjunto de funções de aproximação: atender as condições de simetria e as condições de contorno. Se as condições de contorno são do tipo

$$z(x,y) = f(x,y) + \sum_{i=1}^n a_i y_i(x,y) \quad (5.1.1)$$



Onde  $y_i = 0$  ntorno. Essas funções, nos casos mais simples, podem ser polinômios que devem obedecer as condições de contorno e as condições de simetria. Condições de contorno que incluem derivadas precisam também serem obedecidas e é conveniente combinar o resíduo da equação diferencial e de contorno. Tente sempre usar polinômios ortogonais e suas combinações para se ajustar às condições de contorno quer sejam de primeira, segunda ou terceira espécie, e dão vantagens computacionais quando se implementa, pela sua simplicidade. Funções transcendentais podem também ser usadas, mas em geral aumenta a dificuldade de programação e tem um custo computacional adicional quando comparada com o uso de funções polinomiais.

Em problemas que são dependentes do tempo é conveniente expandir a solução em termos espaciais de maneira que estas satisfaçam as condições de contorno

$$Z_{x,t} = f(x) + \sum_{i=1}^n A_i(t) X_i(x) \quad (5.1.2)$$

As funções  $A_i(t)$  são determinadas por métodos aproximados bem como também as condições iniciais.

Em problemas de autovalor do tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u + \lambda \mathcal{N}u &= 0 \\ B_k u &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \text{ no contorno} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Onde  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{N}$  o operadores diferenciais genéricos. Na maioria dos casos se tem  $\mathcal{N}u = u$ . Em geral, o problema tem uma solução apenas para valores discretos do autovalor  $\lambda$ . Neste tipo de problema o objetivo é aproximar os autovalores e autofunções, assim se expande a função de aproximação em uma serie de funções cada qual satisfazendo as condições de contorno homogêneas dada em (12.5.16):

$$u = \sum_{i=1}^n c_i u_i, \quad B_k u_i = 0 \text{ no contorno} \quad (5.1.4)$$

A função de aproximação acima é substituída na equação diferencial para formar o resíduo, o qual deve ser feio ortogonal em relação as funções de ponderação  $w_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [w_j, \mathcal{L}u_i + \lambda w_j, \mathcal{N}u_i] c_i &= 0 \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^n [A_{ji} + \lambda B_{ji}] c_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$



Este conjunto de  $n$  equações lineares homogêneas para as constantes  $c_i$  tem solução não trivial se e somente se o seu determinante for nulo:

$$\det A_{ji} + \lambda B_{ji} = 0 \quad (5.1.6)$$

A equação acima é um polinômio em  $\lambda$  de grau  $n$  e tem  $n$  raízes as quais são as aproximações dos autovalores. Usualmente essas raízes são distintas e reais. Devido a equivalência aos métodos variacionais o método de Galerkin é o preferido para ser aplicado e porque sob certas condições os autovalores são estacionários ou não sensitivos a erros na aproximação das autofunções.

Exemplo

Seja o problema

$$y'' + \lambda (1 - x^2) y = 0 \quad \therefore y(0) = y(1) = 0 \quad (5.1.7)$$

Este problema é complicado face o fator  $1 - x^2$ ; sem ele a solução exata é conhecida e é dada por

$$y_i = \sin \left[ \frac{1}{2} (2i - 1) \pi x \right], \quad \lambda_i = \frac{1}{4} (2i - 1)^2 \pi^2 \quad (5.1.8)$$

As funções acima (solução do problema sem o termo  $1 - x^2$ ) atende as condições de contorno e fornece uma boa fonte de funções de aproximação; polinômios também são um boa fonte tais como

$$y = c_1 \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) \quad (5.1.9)$$

$$\rightarrow y'' = - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 c_1 \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right)$$

Logo o resíduo será dado por

$$\rightarrow \epsilon y = - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 c_1 \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) + \lambda (1 - x^2) c_1 \sin \left( \frac{\pi x}{2} \right) \quad (5.1.10)$$



Fazendo o resíduo ortogonal a função de ponderação (que no caso do método de Galerkin, são as próprias funções de aproximação  $\sin \frac{\pi x}{2}$ ) usando-se as propriedades do produto escalar, se tem

$$\begin{aligned}
 \left( \varepsilon y, \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) &= \int_0^1 \varepsilon y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = 0 \\
 &= \left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \lambda \int_0^1 1 - x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = 0 \\
 \rightarrow \lambda &= \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx}{\int_0^1 1 - x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx} = 5.317
 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Numa segunda aproximação utilizando-se (5.1.6) se tem

$$\begin{aligned}
 A_{ji} &= - \frac{2j-1}{2} \int_0^1 \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2}\right) dx = \\
 &= - \frac{2j-1}{8} \delta_{ij} \\
 B_{ji} &= \int_0^1 1 - x^2 \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2}\right) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2 (2j-1)^2}, & i = j \\ \frac{-1^{i+j+1} \left[ \frac{1}{i-j} + \frac{1}{i+j-1} \right]}{\pi^2}, & i \neq j \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

Escrevendo um programa em Matlab para a solução do problema:



```
% =====  
% PROBLEMA DE AUTO VALOR Y''+\LAMBDA(1-x^2)Y=0  
% Y=c(I)SIN(PI.x/2)  
% PELO MRP - GALERKIN: (W,Lu)= 0  
% det(A(j,i) + \lambdaB(j,i)) = 0  
% =====  
clearvars; clc;  
N = input('Entre com N número de lambdas a achar:');  
if N <= 1  
    N = 2;  
end  
disp('Problema de Autovalor');  
A = zeros(N,N);  
B = zeros(N,N);  
for i = 1:N  
    for j = 1:N  
        if i == j  
            deltaij = 1;  
            B(j,i) = (1./3) - 1. / ((pi^2*(2*j-1)^2));  
        else  
            deltaij = 0;  
            parc1 = 1. / (i-j)^2;  
            parc2 = 1. / (i+j-1)^2;  
            parc12 = parc1 + parc2;  
            parc3 = (-1.)^(j+i+1);  
            B(j,i) = parc3*parc12/pi^2;  
        end  
        A(j,i) = -((2*j-1)^2*(pi^2/8))*deltaij;  
    end  
end
```

```
end  
syms lambda  
delta = det(A+lambda*B);  
S = solve(delta);  
raizes = vpa(S);  
for k = 1:N  
    fprintf('\n Lambda %i = %f',k,raizes(k));  
end
```

Executando o programa acima para  $N=2, 3, 4$  e  $5$ , por exemplo, temos o seguinte resultados para as raízes  $\lambda_i$ :

5.1253 45.5428 0 0 0

5.1222 39.6799 136.700 0

5.1218 39.6711 106.3614 296.5355 0

5.1217 39.6644 106.2795 206.4257 544.6093

Estes são valores aproximados; os valores reais para os 3 primeiros autovalores são:

$$\lambda_1 = 5.122; \quad \lambda_2 = 39.66; \quad \lambda_3 = 106.3$$





## REFERÊNCIAS

- [1] Zarowski, Christopher J., *An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers*. Wiley-Inter-Science. New Jersey, 2004.
- [2] Zito, Tiziano., *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (ODE)*. Lecture Notes in Max Plank Institute of Colloids and Interface. 2002.
- [3] Walker, James S., *A Primer on Wavelets and Their Scientific Applications*. Chapman&Hall/CRC. Boca Raton. 1999
- [4] Wang, Dehua., *Global Solutions to the Euler-Poisson Equations of Two-Carrier Types in one Dimension*. *Math. Phys.* 48(1977) pp. 680-693.
- [5] Weinberger, Hans F., *Curso de Ecuciones Diferenciales en Derivadas Parciales com método de variable compleja y de transformaciones integrales*. Editorial Reverté. 1970.
- [6] Wesseling. P., *An introduction to multigrid methods*. John Wiley & Sons. Chichester. 1992.
- [7] Wu, X. Y., *A Sixth-Order A-Stable Explicit One-Step Method for Stiff Systems*, *Comput. Math. App lic.*, Vol 35, No 9 (1998), 59-64.
- [8] Yang, Y. Won, Cao, Wenwu, Chung, Tae-Sang and Morris, John., *Applied Numerical Methods Using Matlab*. Wiley-Interscience. New Jersey. 2005.
- [9] Tannehill, John C., Andersen, Dali A. and Pletcher, Richard H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 1997.
- [10] Thompson, Joe F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. Wayne., *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*. North-Holland. 1986.
- [11] Trefethen, Lloyd N., *Is Gauss Quadrature Better than Clawshaw-Curtis?*. *SIAM Review*, vol. 50(1), pp.67-87. 2008.
- [12] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method*. Pearson-Prentice Hall. 1995.
- [13] Verwer, J. and Lang, J., *ROS3P – An accurate Third-order Rosenbrock Solver Designed for Parabolic Problems*. *BIT* 41(4), pp. 731-738. 2001.
- [14] Vicent, Alain (Editor)., *Numerical Methods in Fluid Mechanics*. CRM Proceeding & Lectures Notes. AMS. 1991.