O estudo de equações polinomiais: Uma experiência de ensino-aprendizagem com proposição de problemas

https://doi.org/10.56238/futuroeducpesqutrans-008

Ledevande Martins da Silva
Doutorando em Educação - UFRN
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática - UEPB
IFPB – Instituto Federal da Paraíba/Campus Santa Rita – PB
E-mail: ledevande.martins@gmail.com

RESUMO
Este artigo é um relato de uma experiência e tem como objetivo introduzir equações polinomiais em uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma Instituição Pública Federal na perspectiva da metodologia de ensino-aprendizagem com proposição de problemas referenciada em Paulo Freire. A álgebra das equações polinomiais no Ensino Médio faz parte de um tópico de conteúdo considerado denso, impenetrável e envolvente. Por isso, torna-se essencial para os alunos do Ensino Médio ter domínio de conteúdo e pensamento algébrico devido à possibilidade de torná-lo útil no cotidiano. Dentre as análises e resultados desse relato de experiência, apontamos a importância de permitir que os alunos elaborem os seus próprios problemas e possibilitar o desenvolvimento de habilidades de produção escrita, de codificação e descodificação de situações-problemas de matemática no estudo das equações algébricas. Além de promover desenvolvimento de criação e análise crítica de problemas de matemática de elaboração própria ou ainda proposta pelo professor.

Palavras-chave: Álgebra, Equações Polinomiais, Proposição de Problemas.

1 INTRODUÇÃO

O cenário da formação educacional de alunos do Ensino Médio, nestas primeiras décadas do século XXI, tem sofrido muitas mudanças. Para esse segmento de ensino enaltece-se a aplicação de metodologias de aprendizagem que ponham o aluno em ação e interação com os colegas e com o professor. Este último, na qualidade de mediador mais experiente do conhecimento científico a ser construído em sala de aula, de maneira favorável à gênese e ao desenvolvimento de uma compreensão de conceitos matemáticos fundamentais (essenciais) que farão parte do repertório cultural, científico e intelectual mais sólido e efetivo dos alunos em formação. Nesse sentido, podemos dispor da metodologia de ensino-aprendizagem com proposição de problemas como uma proposta de trabalho viável e agradável do fazer matemática em sala de aula.

Neste ambiente em que estamos inseridos na qualidade de docente é que relatamos nossa experiência com o ensino de álgebra, introduzindo equações polinomiais, que é o último capítulo de matemática do curso de Ensino Médio no corrente ano em que foi realizada essa experiência didática. Os alunos quando chegam nessa etapa já vivenciaram muitas atividades algébricas, eles na maioria das vezes possuem alguns modelos de pensamento no campo da álgebra. No entanto, é necessário fazer vir à tona tais estruturas e constructos mediante a coordenação do trabalho docente.

A seguir, apresentamos em nível nocional, fundamentos do ensino da álgebra das equações polinomiais e o percurso da metodologia de ensino designada de ensino-aprendizagem com proposição de problemas de matemática que serviu de mote inspirador para a realização dessa experiência didática de introdução às equações polinomiais em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

Ao final, apresentamos uma descrição e análise dos resultados obtidos com essa experiência didática. E nas considerações finais apontamos contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem com proposição de problemas na sala de aula de matemática abordando o tópico introdutório de álgebra das equações polinomiais do 3º grau.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS À METODOLOGIA DE ENSINO COM PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

A álgebra escolar é um ramo de conteúdo estabelecido na maioria, se não em todos os programas curriculares brasileiros e mundiais e dentre os objetos de estudos da álgebra, surgem as equações algébricas. "Certamente, um problema fundamental para a matemática é a resolução de equações, e as equações algébricas ocupam um lugar especial" (Andrade, 2013, p.113) na modelação dos fenômenos das ciências da natureza, sociais e do dia a dia. Nas últimas décadas do século XXI, o currículo do Ensino Médio tem diminuído drasticamente ou mesmo desaparecido conteúdos relevantes do programa escolar, sobretudo os tópicos de álgebra relacionados aos estudos dos polinômios e das equações polinomiais com grau superior ou igual a 3 (Silva; Silva; Neves, 2022) de importância capital para o desenvolvimento e consolidação do pensamento algébrico ao término do Ensino Médio.

Com a homologação do documento oficial, BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para o Ensino Médio (Brasil, 2018), ela atribui uma maior importância à unidade de conhecimento da álgebra. Não obstante, neste documento, criou-se uma imposição curricular às redes de ensino brasileiro com propósitos mercadológicos para atender a uma nova demanda de políticas públicas autoritárias ao invés de um estabelecimento de recomentações teórico-metodológicas como ocorrera com os documentos curriculares anteriormente produzidos nas década de 80 e 90 do século XX. Também, podemos observar um verdadeiro esvaziamento de conhecimentos que representam o patrimônio cultural historicamente acumulado pela humanidade que deveria ser de acesso a todos os alunos da educação de Ensino Médio (Silva; Silva; Neves, 2022).

> Há padrões procedimentais na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), tais como Resolução e Elaboração de Problemas sem fazer distinção entre um e outro movimento, não toca na Exploração de Problemas. Além de não trazer um referencial teórico e prático da contribuição da pesquisa em Educação Matemática no Brasil e no mundo. A concepção de currículo deveria ser de um documento com recomendações de orientações teórico-metodológicos, mas nunca uma imposição a ser seguida a risca sem critérios e sem análise crítica. Inclusive uma das reivindicações da ANFOPE (Associação Nacional de Formação de Professores) era pela criação de uma BCN (Base Comum Nacional) respaldada em outros princípios (científicos e epistemológicos) e fundamentos (filosóficos, históricos e sociais) que

> não tem nada a ver com esse documento curricular vigente (Silva; Silva, Neves, 2022, p. 55031).

Contudo, há esse desaparecimento devido evidentemente à tendência errônea de se enfatizar procedimentos mais do que estruturas subjacentes (Coopersmith, 1984 apud Eisenberg; Dreyfus, 1995) relacionadas às construções de pensamento e raciocínio algébrico no desenvolvimento das práticas de ensino de matemática em álgebra. Este ensino, tradicionalmente equivocado, "não só traz em si o perigo de se considerar a matemática como um simples compêndio de algoritmos, como também torna muito difícil para os alunos a tarefa de generalizar e aplicar o que aprenderam" (Eisenberg; Dreyfus, 1995, p. 128) no ensino desses tópicos de fundamental importância no estudo de álgebra no Ensino Médio.

As equações algébricas ou de qualquer outra natureza (logarítmicas, trigonométricas, diferenciais, etc), constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante da matemática. O sentido etimológico da palavra equação tem a mesma raiz latina de igual e igualdade (Garbi, 1997). "As equações são perguntas e as respostas a elas precisam, nesses casos, ser extraídas de uma análise engenhosa da própria pergunta; decididamente, as fórmulas não são tudo" (São Paulo, p. 14, 2008). Portanto, resolver uma equação consistirá em encontrar um valor desconhecido que costumamos denominar de incógnita que representará a solução da equação, indicando uma relação de equivalência entre o primeiro e segundo membros, mantendo-se este princípio em todas as etapas de tratamento dado ao longo das modificações processuais de resolução a partir da equação original fornecida. Além de favorecer o pensamento algébrico para compreensão de relações entre grandezas (variáveis) no estudo das funções matemáticas e na modelação de situações-problemas (Silva, 2013).

> Os tipos de modelos de raciocínio desenvolvidos aos se trabalhar com equações polinomiais podem ser generalizados para outras situações. Através dos polinômios, podem-se introduzir noções de nível superior sobre funções. A solução de problemas que, à primeira vista, parecem não ter qualquer ligação com polinômios acaba dependendo muito deles. Os polinômios são onipresentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com segurança (Eisenberg; Dreyfus, 1995, p.128).

O interesse pelas equações algébricas é bastante antigo, porém a fórmula resolutiva para equações polinomiais do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ surgiu, somente no século XVI com grande avanço teórico em pleno Renascimento na Europa. O primeiro estudioso a resolver equação do 3º grau foi o matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526) por volta de 1515, porém ele não divulgou a solução. Contudo, a divulgação da fórmula resolutiva para resolver equações do 3º grau apresentada em detalhes foi especialmente realizada pelos matemáticos italianos Tartaglia (1500-1557) e Cardano (1501-1576). Desta época, também temos a solução da equação do 4º grau atribuída ao matemático italiano Ludovico Ferrari (1522-1565) com procedimentos semelhantes a Tartaglia-Cardano, ainda mais complicados (Garbi, 1997; Oliveira; Fernández, 2012; Andrade, 2013).

Contudo, mais de 200 anos se passarão, até que em 1824, o matemático norueguês Abel (1802-1829) mostrou que é impossível resolver as equações de 5º grau por meio de radicais. Pouco tempo depois, finalmente em 1830 o matemático francês Galois (1811-1832), estendeu esse resultado para as equações de grau maior que 5, de modo que a busca de uma fórmula resolutiva expressa por radicais para achar as soluções desse tipo de equações se tornou um caminho inviável. Em outras palavras, ele descobriu um método para determinar quando uma equação qualquer é resolúvel com as operações elementares (Garbi, 1997; Oliveira; Fernández, 2012; Andrade, 2013), "obtendo condições necessárias e suficientes para que uma equação determinada seja solúvel por radicais, de uma maneira tão bonita quanto profunda" (Andrade, 2013, P. 114).

Em contrapartida, outros acontecimentos da história da matemática permitiram um maior desenvolvimento da teoria das equações polinomiais com oTeorema Fundamental da Álgebra que foi demonstrado pelo matemático Gauss (1777-1855) na sua tese de doutorado em 1799, sendo considerado um dos mais elegantes e importantes teoremas da matemática. Em sentido amplo, depois da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra por Gauss, podemos dizer que não se conhece nenhum resultado geral sobre os números inteiros ou reais de um polinômio qualquer, mas sabe-se que um polinômio de grau *n* tem no máximo *n* raízes distintas reais ou imaginárias (Garbi, 1997; Oliveira, Fenández, 2012). Em outras palavras, de acordo com a enunciação de Gauss: "Este teorema afirma que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz" (Garbi, 1997, p. 116).

> Outros tópicos importantes envolvendo polinômios são a regra de sinais de Descartes, que dá o número máximo de raízes positivas e negativas de um polinômio; o teorema de De Moivre, qua ajuda a achar todas as raízes de $x^n = 1$; e o método de Newton de aproximação de raízes. Podem-se aprender muitos aspectos do pensamento matemático através do estudo dos polinômios. Em suma, os polinômios são importantes e deveriam permanecer no currículo (Eisenberg; Dreyfus, 1995, p. 134).

Para Usiskin (1980 apud Flores, 1995), ele nos diz que uma das metas do ensino de matemática deveria ser o aprendizado pelos alunos de métodos de resolução de problemas. Na década de 80 e 90 do século passado, a recomendação para ensinar álgebra enfatizou a resolução de problemas para o trabalho em sala de aula. No entanto, com o adicional da proposição de problemas, os alunos além de apresentar estratégias de aproximação de resoluções/soluções para equações polinomiais, eles poderão elaborar e resolver problemas que lhes possam fazer mais sentido para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quanto à metodologia mais específica de ensino-aprendizagem com proposição de problemas, inicialmente teve como pioneiro o livro de Brown e Walter (2005) *"The Art of Pose Problem*" e as publicações de English (2003) segundo artigo intitulado "*Problem solving for 21st century*" de English e Sriraman (2010). Ainda, neste mesmo artigo, os autores afirmam que a perspectiva da Resolução de

Problemas para o século XXI destaca diversos elementos, tais como a modelação de problemas e uma visão interdisciplinar que serão incorporadas a essa linha de pesquisa;e certamente, a proposição de problemas apresenta estas características devido às demandas de leitura de mundo e produção textual de autoria de alunos, além da problematização em contextos diversos.

Enquanto, Jurado (2016) em um artigo intitulado: "*Problem Posing: An Overview for Further Progress"*, destaca que tanto a proposição quanto a resolução de problemas são dois aspectos essenciais da atividade matemática escolar; bem como no trabalho dos matemáticos profissionais. Contudo, a proposição de problemas possivelmente permitirá um maior envolvimento na ação de aprendizagem dos alunos, formando mais propositores de problemas; e não meramemte solucionadores de problemas. Em outras, palavras, com a proposição de problemas, os alunos podem adquirir habilidades progressivas de longo alcance para toda a vida.

Singer et al. (2013 apud Jurado, 2016), retomando as ideias de Kilpatrick (1987 apud Jurado, 2016), dizem que a proposição de problemas é um assunto antigo já tratado anteriormente; o que é novo é a consciência de que a proposição de problemas precisa permear os sistemas educacionais em todo o mundo; tanto como um meio de ensino quanto como um objeto de ensino; bem como no estabelecimento de metas importantes em situações da vida real. Portanto, em nível mundial, os autores internacionais têm dado ênfase à proposição de problemas diferentemente do que aconteceu no passado. Por isso, ela deve ocupar um lugar de destaque na atualidade, sobretudo no século XXI com as novas demandas educacionais.

A proposição de problemas poderá ocorrer antes, durante ou depois da resoluçãode problemas segundo Silva e Andrade (2016) por meio de novas perguntas, extensões e problematizações em contextos variados, inclusive sócio-político e cultural. Todavia, para uma leitura de mundo (matemática, linguagem, etc) com proposição de problemas em uma perspectiva freireana: "Outros, ainda dizem que o esforço de leitura da realidade através da codificação, e, portanto, da descodificação das codificações que representam um pedaço da realidade" (Freire; Guimarães, 2021, p. 54) é um trabalho que mantem o aluno na atividade central do processo, mas vai exigir do professor à coordenação do trabalho didático-pedagógico como mediador dos processos de construção da teoria matemática elaborada e construída conjuntamente em sala de aula por meio de uma prática educativa intencional.

Diante disso, a proposição de problemas é uma experiência didático-pedagógica que poderá receber influência freireana por compreender um movimento de pensamento dialético. "Esse método não implica que se reduza o concreto ao abstrato (o que significaria que o método não é de caráter dialético), mas ao contrário, que se mantenham os dois elementos como contrários em inter-relação no ato reflexivo" (Freire, 2016, p. 62). Portanto, ao invés de um simples reflexo imediato, vai-se exigir uma abstração sobre a situação concreta e depois um caminho de regresso do concreto ao abstrato na apreensão do objeto de estudo.

Com isso, na análise de um situação matemática (codificada), a de(s)codificação do problema vai exigir que se caminhe do abstrato ao concreto, para depois disso voltar do concreto ao abstrato. Compreendendo esse processo de abstração como o concreto pensado. Isto significa que não devemos partir do simples para o complexo, pois a realidade é sempre complexa. Em outras palavras, é colocar os alunos enquanto sujeitos partícipes do processo no envolvimento da construção do conhecimento de um objeto matemático por meio de uma situação matemática (impasse/desafio) a ser codificada em um trabalho coletivo de reconhecimento do objeto matématico de estudo com criação de situação-problema que poderá ser elaborada pelos alunos ou ainda proposta pelo professor.

Se o trabalho com proposição de problemas na análise de uma situação matemática de codificação e de(s)codificação for bem operacionalizado será desvelador da realidade estudada. Dessa maneira, o trabalho nessa perspectiva levará "à substituição da abstração pela percepção crítica do concreto, que então deixou de ser uma realidade densa, impenetrável" (Freire, 2016, p. 63). Nesse sentido, quando os alunos percebem a realidade como profunda, complexa e envolvente, torna-se imprescindível realizar um estudo por meio de uma abstração. Para essa concepção de método dialético de inspiração freireana, ele nos diz:

> Em nosso método, a codificação assume, no início, a forma de uma fotografia ou desenho que representa uma situação existencial real ou uma situação existencial construída pelos alunos. Quando se projeta essa representação, os alunos efetuam uma operação que se encontra na base do ato de conhecimento: tomam distância do objeto cognoscível. Os educadores também fazem a experiência do distanciamento, de modo que tanto educadores quanto alunos podem refletir juntos, de maneira crítica, sobre o objeto cognoscível que os intermedeia. A finalidade da decodificação é atingir um nível crítico de conhecimento, começando pela experiência que o aluno tem da situação em seu "contexto real" (Freire, 2016, p. 63-64).

Uma experiência didático-pedagógica com proposição e resolução de problemas de matemática tendo como ferramentas de trabalho a codificação e de(s)codificação é uma possibilidade de estudo baseado no método dialético de inspiração freireana que traz maior dinamicidade à sala de aula, pois envolvem os alunos na construção de conhecimento por meio de uma reflexão crítica em um trabalho escolar livre, consciente coletivo e universal. "Na compreensão e interpretação do problema surgem as representações diversas e elas são usadas tanto para codificar quanto para descodificar o problema" (Silva, 2013, p. 111). Em síntese, a proposição de problemas é mais uma alternativa de metodologia de ensino-aprendizagem de trabalho associado que se for bem-sucedida promoverá criatividade e desenvolvimento de senso crítico na sala de aula.

3 METODOLOGIA

Nossa experiência didática se baseia em quatro etapas: primeiro momento a elaboração de problemas pelos alunos e a tentativa deles em grupo de obter uma soluçãoe/ou resolução diante de uma situação de desafio e/ou impasse. Segunda etapa, apresentação dos problemas pelos alunos mediante um representante do grupo, seguida de questionamento por parte do professor e/ou dos colegas de turma. Na terceira etapa, formalização do conteúdo de matemática pelo professor e ação-interação no fazer matemático entre alunos, entre professor-aluno ou entre professor-alunos. Finalizando com uma quarta etapa: a proposição de problema por parte do professor com uma nova situação-problema, visando uma maior consolidação do trabalho didático-pedagógico para garantir uma maior solidez na educação matemática dos alunos participantes dessa experiência metodológica de ensino-aprendizagem.

Esta descrição é meramente ilustrativa para uma melhor compreensão dos acontecimentos que foram aqui registrados, mas não concebemos etapas estanques e engessadas de aplicação direta para o ambiente real de uma sala de aula. Pois, o cotidiano escolar se apresenta bastante dinâmico, complexo e envolvente. Não apresentamos receitas prontas e acabadas, mas uma reflexão teórica sobre uma prática social educativa que foi operacionalizada de maneira satisfatória e válida.

Acreditamos que cada professor vai descobrindo o seu caminhar teórico-metodológico a ser seguido, apenas enfatizamos o movimento dialético de se partir de um processo de abstração por meio de uma apropriação que tenha como ponto de partida e ponto de chegada uma prática social educativa na acepção freirena de se movimentar do abstrato para o concreto e depois fazer o caminho de volta do concreto ao abstrato com uma devolutiva criativa e crítica mais renovada. Mas que não se esgota com o conteúdo apresentado, não se encerra em si mesma. Pois, esse movimento de reflexão crítica passa a fazer parte da nossa formação permanente.

A experiência foi realizada numa Instituição Pública Federal da Paraíba na cidade de Patos-PB com uma turma do 3º ano do Ensino Médio. A turma era composta de 17 alunos. Nesta semana, 15 alunos compareceram às aulas. Como dois alunos faltaram, a turma foi dividida em cinco grupos: G1, G2, G3, G4 e G5; cada grupo constituído por três alunos. Foram realizados dois encontros, um primeiro de 2 horas- aulas e um segundo de 1 hora-aula, sendo cada aula de 50 minutos. Totalizando 3 horas-aulas de uma semana do mês de novembro (11) do ano letivo de 2018.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISES DOS RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

No 1º encontro (06-11-2018), a atividade proposta foi a seguinte: *Elaborar e resolver um problema a partir da equação* $x^3 = 6x + 9$. O professor não apresentou o conteúdo nem mesmo uma situação-problema. Na proposição de problemas, esperamos que os alunos em um trabalho associado e coletivo possam elaborar a contextualização de um modelo matemático já existente ou que ainda não tenha sido modelado.

A metodologia de ensino com resolução de problema propriamente dita, parte de um problema e o início, meio e fim do processo de ensino-aprendizagem consiste em resolver problemas. Enquanto, a proposição de problemas vai exigir dos alunos a elaboração do enunciado do problema e apresentação de estratégias de resolução e/ou tentativa de chegar ao resultado, o fim não é a solução do problema, mas a mobilização de conhecimentos que vão estimular novos aprendizados.

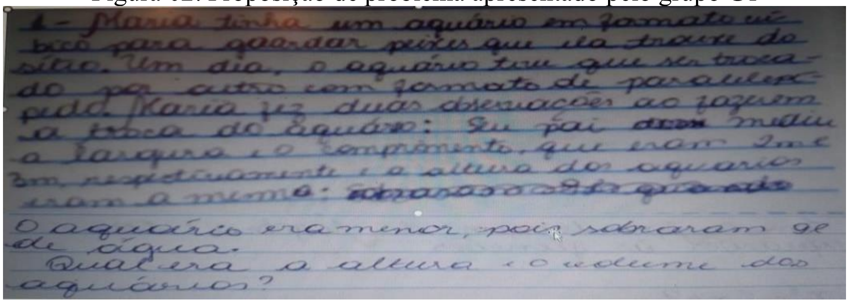
Os alunos trabalharam em grupo sem a interferência do professor, após 15 minutos foi escolhido um (1) aluno de cada grupo para fazer a leitura e defender a proposição do problema elaborado coletivamente pelo seu grupo de trabalho. Paulo Freire (2016) chama esse momento de distanciamento crítico do objeto cognoscível tanto por parte dos alunos quanto por parte do professor. Este tempo pedagógico que é dado aos alunos é necessário para que eles possam desenvolver mais autonomia, além de propiciar debruçamento sobre a produção escrita de uma situação-problema em forma de um pequeno texto, poder codificar e descodificar o problema em colaboração com os colegas de sua equipe por meio de discussões no pequeno grupo que os ajudarão na interpretação das situações que foram criadas por eles próprios. Após esse trabalho, a situação-problema foi levada para a discussão no grande grupo com o objetivo de se chegar a um consenso geral.

Figura 01: Imagens de alunos trabalhando em grupo na elaboração dos problemas

Fonte: Arquivo do autor

Apresentaremos, em seguida, os cinco problemas elaborados pelos alunos nos seus respectivos grupos G1, G2, G3, G4 e G5 com análises e comentários relativos à produção dos alunos nos seus grupos de trabalho. As descrições e análises que se seguem são destaques e observações que julgamos relevantes para a compreensão desse trabalho didático-pedagógico que foi realizado com essa turma do 3º ano do Ensino Médio.

Figura 02: Proposição de problema apresentado pelo grupo G1

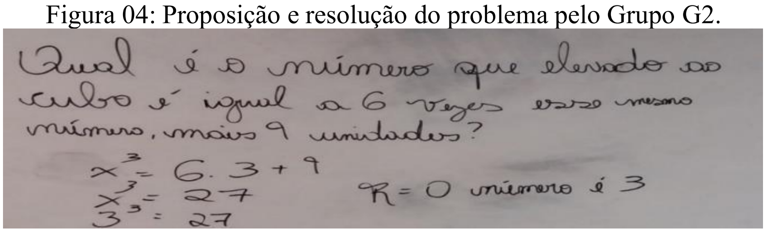

1- Maria tinha um aquário em formato cúbico para guardar peixes que ela trouxe do sítio. Um dia, o aquário teve que ser trocado por outro com formato de paralelepípedo. Maria fez duas observações ao fazerem a troca do aquário: Seu pai mediu a largura e o comprimento, que eram 2m e 3m respectivamente e a altura dos aquários eram a mesma:
O aquário era menor, pois sobraram 9l de água.
Qual era a altura e o volume dos aquários?

Fonte: Arquivo do autor

Transcrição: Maria tinha um aquário em formato cúbico para guardarpeixes que ela trouxe do sítio. Um dia, o aquário teve que ser trocado por outro com formato de paralelepípedo. Maria fez duas observações ao fazerem a troca do aquário: seu pai mediu a largura e o comprimento, que eram 2 m e 3 m, respectivamente e a altura dos aquários eram a mesma. O aquário era menor, pois sobraram 9 l de água. Qual era a altura e o volume dos aquários?

Dentre os cinco problemas elaborados pelos grupos de trabalho em sala de aula,a produção do grupo (G1) foi o problema com o contexto mais significativo e mais amplo, apesar do grupo não ter apresentado uma resolução nem mesmo uma solução para o problema. Por meio de questionamento oral do professor foi possível perceber que a solução era do conhecimento deles do grupo (G1). Evidenciando que na proposição de problemas os alunos já possuem um grau de domínio sobre o conteúdo, mesmo que esta compreensão ainda esteja em nível informal e elementar. Por isso que o pensamento algébrico atua no nível da abstração, pois vai exigir por parte dos alunos uma reflexão para se chegar ao concreto pensado na construção de uma aprendizagem mais efetiva e consistente (Freire, 2016).

Figura 04: Proposição e resolução do problema pelo Grupo G2.


Qual é o número que elevado ao cubo é igual a 6 vezes esse mesmo número, mais 9 unidades?

$x^3 = 6.3 + 9$

$x^3 = 27$

$3^3 = 27$

R = O número é 3

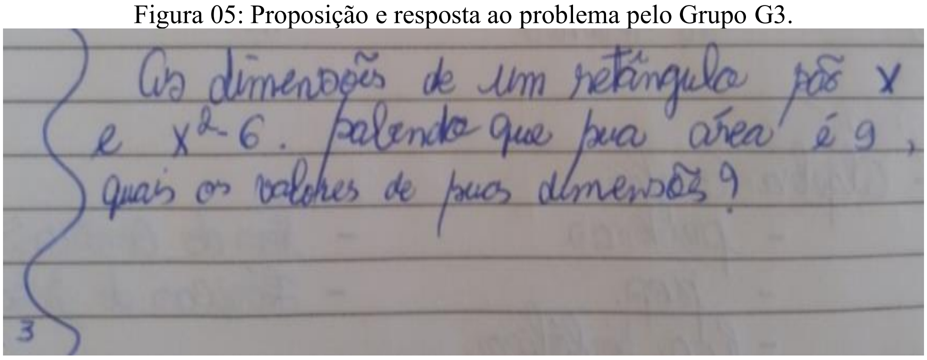
Fonte: Arquivo do autor

Transcrição: Qual é o número que elevado ao cubo é igual a 6 vezesesse mesmo número, mais 9 unidades?

Neste problema apresentado pelo grupo (G2) corresponde a uma tradução da escrita algébrica da equação para uma linguagem vernácula. O contexto pode ser considerado comum porque o problema é uma transcrição literal da equação proposta, apenas a incógnita x passou a ser denominada de um número, supostamente desconhecido. No entanto, apesar do contexto não ser considerado sofisticado, dentre oscinco grupos, eles foram um dos grupos que trouxe uma resolução para o problema elaborado. Embora o cálculo consista numa simples verificação da solução inteira (3) que satisfaz a equação. Portanto, podemos dizer que a resolução apresentada recebeu um tratamento numérico e o recurso algébrico mais elaborado não foi acionado ao processo de resolução da equação em questão.

Não obstante, no quesito processo de codificação e descodificação do problema (Silva, 2013; Freire, 2016), os alunos realizaram conversões e tratamentos em diversos níveis de representação: verbal, numérica e simbólica. Além deles realizarem manipulações de verificação da solução encontrada, fazendo o caminho de volta, do abstrato ao concreto enquanto pressupostos efetivos. Apesar desse abstrato não se enquadrar propriamente em um consagrado pensamento algébrico mais sofisticado que vai requerer um tratamento mais sistematizado e formal. A teoria matemática é um processo que não ocorre em um instante de um ou dois encontros de estudos, mas ela fará parte de uma construção que vai se constituindo ao longo da escolaridade.

Figura 05: Proposição e resposta ao problema pelo Grupo G3.



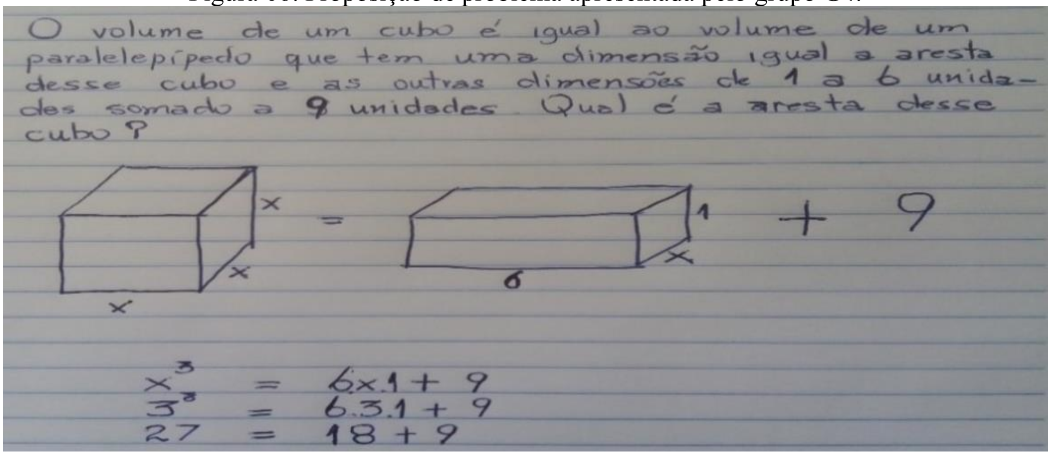
Fonte: Arquivo do autor

Transcrição: As dimensões de um retângulo são x e $x^2 - 6$. Sabendoque sua área é 9, quais os valores de suas dimensões?

Neste problema do grupo (G3), eles trouxeram o contexto geométrico de área de um retângulo de dimensões expressadas pelos dois termos algébricos que foram enunciados no problema, respectivamente x e $x^2 - 6$. Por outro lado, o produto dessas duas dimensões como resultado no 2º membro da equação não apresenta unidade de medida. De onde podemos deduzir que o resultado desse produto definido por uma superfície retangular poderia ser traduzido como 9 unidades quadradas ($9u^2$) paraexpressar a grandeza área. Assim como o número 3 no canto inferior à esquerda na figura (05) está em unidade linear (3u). Evidentemente, estas observações dizem respeito ao ponto de vista da matemática mais rigorosa que deve requerer uma escrita mais adequada para esta situação elaborada pelos alunos do grupo (G3). Podemos perceber que mesmo o grupo não tendo apresentado uma resolução com sequências lógicas que levassem à solução do problema, eles conheciam o resultado do problema.

Diante da falta de conhecimento sistemático por parte dos alunos, o professor precisa realizar as intervenções necessárias de maneira que os alunos possam compreender os processos de formalização dos conteúdos que envolvem a temática de resolução da equação, por exemplo: $x.(x^2 - 6) = 9$, donde deduzimos: $x^3 - 6x - 9 = 0$. Esta equação precisou ser completada com o coeficiente 0 do termo x^2. Logo, trata-se da equação polinomial: $x^3 + 0x^2 - 6x - 0 = 0$. E a partir desses artifícios de cálculo, concluiu-se apresentando as soluções: 3, $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Para o contexto do problema, apenas a solução inteira é válida que corresponde a $3u$ de unidade linear. Não detalharemos em todos os problemas o tratamento recebido nos processos resolutivos realizados com auxílio do professor, mas deixaremos registrado aqui que essa última etapa é indispensável ao trabalho em sala e não foi desprezada nesta experiência didática. Dessa maneira, podemos garantir a efetividade e compreensão do conhecimento científico que os alunos precisam se apropriar nos espaços de formação escolar. Pois, há conhecimentos que só são apreendidos por meio da educação formal.

Figura 06: Proposição de problema apresentada pelo grupo G4.



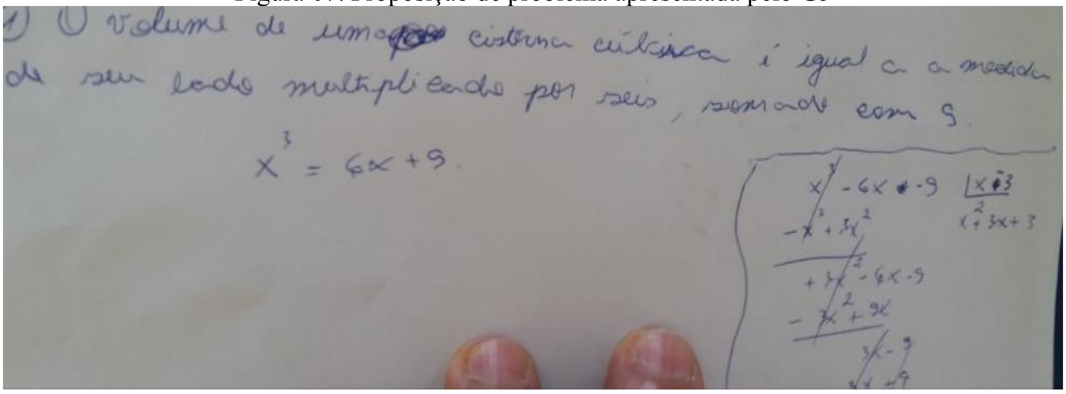
Fonte: Arquivo do autor

Transcrição: O volume de um cubo é igual ao volume de um paralelepípedo que tem uma dimensão igual a aresta desse cubo e as outras dimensões de 1 e 6 unidades somado a 9 unidades. Qual é a aresta desse cubo?

Neste problema o grupo (G4) trouxe um contexto geométrico para a equação algébrica, embora tenha apresentado um erro de grandeza quando foi somado 9 unidades lineares ao volume do paralelepípedo quando neste tipo de enunciado requer uma unidade cúbica ($9u^3$). Eles também conheciam a solução do problema e recorreram à representação gráfica por meio do desenho geométrico; e a resolução apresentada se encontra em termos numéricos, não passando da verificação de uma solução já conhecida pelo grupo. Certamente, mantendo-se no mesmo nível do grupo (G2) com o adicional da representação gráfica (geométrica) para a interpretação do problema proposto pelo seu grupo (G4).

Nas palavras de Paulo Freire (2016), no início de apreensão do objeto cognoscível, a primeira etapa é o processo de codificação com a situação-problema com aparência (forma) de uma fotografia ou desenho que vai representar a situação construída pelos alunos. Em seguida, podemos observar o processo de descodificação (observação, análise e decomposiçao) da situação-problema e o desenvolvimento de uma resposta ao problema por eles elaborados que envolve uma abstração em cima do concreto representado pelo conteúdo matemático em processo de construção, mesmo que essa abstração não venha a se constituir o que em matemática se costuma designar de uma abstração propriamente dita em nível de pensamento algébrico mais elaborado e rigoroso.

Figura 07: Proposição de problema apresentada pelo G5



Fonte: Arquivo do autor

Transcrição: O volume de uma cisterna cúbica é igual a medida de seu lado multiplicado por seis, somado com 9.

O grupo (G5) trouxe o contexto geométrico na transcrição verbal da equação algébrica acrescentando o uso cotidiano do formato cúbico para as cisternas, no entanto não registraram nenhuma pergunta que gerasse uma expectativa de resposta. Esse grupo, como os demais grupos, conheciam a solução da equação para valor inteiro (3). Ainda podemos perceber uma interessante tentativa de buscar mais de uma solução paraa equação proposta. Na plenária eles disseram que não resolveram a equação porque o "*delta*" (discriminante) dela dá negativo. De onde podemos inferir que os alunos do grupo (G5) sabiam que o problema era sobre volume de uma cisterna e não faria sentido uma solução com números imaginários.

A plenária durou 25 minutos, foi uma apresentação de 5 minutos para cada representante dos cinco grupos, respondendo aos questionamentos do professor de modo que houvesse um maior esclarecimento tanto da enunciação verbal apresentada quanto ao que diz respeito à tentativa deles apresentarem uma resolução e o porquê do grupo ter indicado a solução três (3) como resultado da equação algébrica: $x^3 = 6x + 9$. Após a apresentação dos cinco representantes de alunos de cada grupo, o professor mostrou um método de resolução para a equação algébrica do 3º grau acima na tentativa de dar início ao processo de sistematização do conteúdo.

Inicialmente, o processo consistiu em substituir a variável x por $u + v$. Em seguida, desenvolveu-se o produto notável por meio da expansão do cubo da soma de dois termos da expressão $(u + v)^3$. Após comparar a equação original $x^3 - 6x - 9 = 0$ com expansão do cubo do binômio foi feito uma correlação de que $u \cdot v = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-6) = 2$. Logo, em seguida, simplificou-se a equação e criou-se um novo parâmetro (t) para reduzir a equação do 3º grau em uma equação do 2º grau. Por fim, chegou-se ao resultado $x = 3$ por meio das devidas substituições.

O professor propôs que os alunos tentassem demonstrar a fórmula resolutiva da equação polinomial do 3º grau, sem grande sucesso pelos alunos nos seus grupos de trabalho. Em seguida, o professor resolveu demonstrar a fórmula de Tartaglia-Cardano como é conhecida para equações polinomiais do 3º grau na forma $x^3 + px + q = 0$. Apesar dos alunos terem acompanhado a demonstração da fórmula, o desenvolvimento dela gerou muitas dúvidas devido aos recursos algébricos se mostrarem demasiadamente sofisticados na sua aplicação e execução. Depois, solicitamos que eles resolvessem a equação pela fórmula resolutiva que foi apresentada. Daí, com esta ação e interação por parte dos alunos, finalizamos o primeiro encontro.

No 2º encontro (07-11-2018), propomos uma segunda atividade em papel impresso com o seguinte enunciado: *Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo combase retangular, de lados 3 m e 5 m e de mesma altura do cubo. O valor de x dever ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m^3 maior do que o do paralelepípedo. Escreva a equação que modela a situação-problema acima. Em seguida, descubra o valor de x* (ADAPTAÇÃO DE SÃO PAULO, 2008, p.16-17).

Houve inicialmente certa dificuldade de interpretação do enunciado da situação- problema de quando se fazia a comparação do cubo ser 4 m^3 a mais que o paralelepípedo. Após algumas discussões entre eles nos seus respectivos grupos de trabalho, chegaram em um consenso de que o modelo para a situação consistia no fato do cubo ser igual ao paralelepípedo mais 4 m^3. Definindo dessa maneira o modelo matemático por meio de diversos recursos e estratégias de resolução/solução da situação: interpretação geométrica, representação algébrica e substituição numérica concluíram que a solução é 4 metros para a equação $x^3 = 15x + 4$.

Outro grupo optou pelo uso da fórmula resolutiva de Tartaglia-Cardano, sem sucesso; e resolveram recorrer ao método mais elementar da substituição ao que lhes pareceu ser o mais eficiente diante do obstáculo que a fórmula lhes impunha. Eles encontraram $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Podemos constatar que o recurso à fórmula é um procedimento mecanicista na maioria das vezes vazio de significado. Pois, resolver uma equação, para muitos alunos significa simplesmente substituir números em um receituário ao invés de demostrar uma compreensão contextual mais ampla da problemática apresentada diante de um determinado desafio que lhes foi proposto.

Todavia, efetivamente em matemática há conteúdos que requer um conhecimento mais técnico. Neste caso específico, faz-se necessário o professor mostrar ampliações possíveis diante de impasses e entraves que ora se apresentam para que os alunos possam vencer determinadas dificuldades, não desistam de fazer verificações e buscar saídas mais criativas e críticas. Para o problema proposto e caminho adotado pelo grupo, eles precisavam antes vencer certos obstáculos de modo a poder superá-los. Esse trabalho vai exigir por parte do professor um trabalho com mais diretividade. Com isso, mostramos para os alunos que quando elevamos ao cubo um número na forma: $2+\sqrt{-1}$, obtemos $2+11\sqrt{-1}$ ou $2 + \sqrt{-121}$. Logo, o resultado da soma das raízes cúbicas da expressão que travou esse grupo ao usar a fórmula resolutiva pode ser substituída na expressão por: $x = 2+\sqrt{-1} + 2 -$

$\sqrt{-1} = 2 + 2 = 4$. Donde, obtivemos o mesmo valor quatro (4) já encontrado por alguns alunos que já tinham resolvido mentalmente a equação.

> A grande preocupação do professor não pode ser a de "esgotar os conteúdos", mesmo porque tal esgotamento nunca é possível na prática, mas sim a de aproveitar as oportunidades para estimular o crescimento pessoal de cada estudante, por meio de um contato proveitoso com algumas ideias fundamentais da Matemática (São Paulo, 2008, p. 33)

A mediação do professor é imprescindível no processo de sistematização do conhecimento, ou melhor, na organização do saber elaborado e consolidado enquanto patrimônio cultural historicamente acumulado pela humanidade. Os alunos não deverão ficar somente com o conhecimento espontâneo, eles precisam se apropriar do conhecimento científico mais elaborado. Neste momento, é necessário a intervenção do professor de maneira mais diretiva e intencional na promoção de construções teóricas mais sofisticadas sobre a prática social educativa que foi desenvolvida em sala de aula.

Pelo exposto, encerramos a introdução às equações polinomiais do 3º grau com uma maior participação dos alunos na compreensão, argumentação, contextualização e problematização dos conteúdos como processos de mediação instrumental indispensável para o desenvolvimento de habilidades de leitura e produção de situações-problemas com intervenção última do professor enquanto mediador do processo de ensino-aprendizagem. Além da possibilidade de extensão na exploração criativa e indicação de teorias matemáticas em vias de construção na intenção de apresentar o tópico das equações algébricas de modo a favorecer a abordagem da necessidade de criação dos números complexos (unidade i – imaginária) pelos matemáticos como ideia basilar para solucionar equações polinomiais de grau igual ou maior do que 3.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema das equações polinomiais é considerado bastante denso, complexo e impenetrável. Mas, esta não foi a direção que caminhamos na experiência didática apresentada com esta temática. Posto isto, tivemos como objetivo dar uma noção de como e por que as equações polinomiais devem fazer parte do currículo do Ensino Médio. Inicialmente, os alunos desenvolveram algum raciocínio antes da apresentação de uma resolução mais formal. Por isso, eles nos seus grupos de trabalho realizaram mais uma tradução verbal para a representação simbólica da equação do que propriamente uma resolução do problema que foi majoritariamente elaborado por eles próprios com criatividade e criticidade.

Atualmente, há uma tentativa de esvaziamento dos conteúdos de matemática no Ensino Médio brasileiro. A temática dos polinômios e equações algébricas é um dos conteúdos em processo de extinção do currículo da educação de Ensino Médio no contexto brasileiro mais recente. Não obstante, para que se possa desenvolver pensamento algébrico consistente é imprescindível a formação de conceitos matemáticos fundamentais de álgebra escolar. Neste sentido, procuramos mostrar a importância da permanência desses temas sob uma nova abordagem com proposição de problemas de matemática enquanto metodologia de ensino-aprendizagem alternativa para um ensino mais dinâmico no movimento da abstração envolvidos nos processos de elaboração de situação matemática concreta para ser pensada e refletida coletivamente e criticamente.

Este relato traz uma reflexão em torno da metodologia do ensino-aprendizagem com proposição de problemas no sentido de ter favorecido uma transformação dos processos didático-pedagógicos em momentos de sala de aula mais criativo e rico; bem como no desenvolvimento de exploração mais criativa e compreensão crítica da produção escrita textual, nos processos de codificação e descodificação em situação-problema elaborada por parte dos alunos ou ainda proposta pelo professor. Esta experiência propiciou aos alunos se defrontarem com problemas matemáticos elaborados por conta própria e propostos pelo professor na interpretação dos mesmos, durante o processo de criação, leitura e resolução desses problemas na abordagem introdutória das equações algébricas do terceiro grau.

O trabalho didático-pedagógico foi desenvolvido com a mediação do professor em torno da temática das equações polinomiais com retorno por parte dos alunos quando mostraram um potencial ascendente de apropriação e aquisição de conhecimentos matemáticos de modo que a experiência metodológica de ensino com proposição de problemas possibilitou para os alunos alcançarem níveis cada vez mais sofisticados de pensamento algébrico na promoção de habilidades de codificação e descodificação de problemas e análises críticas que passarão a fazer parte do repertório cultural e intelectivo desses alunos de Ensino Médio, além de promover conhecimentos e habilidades de trabalho associado, coletivo, livre e consciente que os acompanharão ao longo da vida inteira.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. F. S. Tópicos especiais em álgebra. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p. 113-121.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base, Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> Acesso em: 16 de jun. 2020

EISENBERG, T.; DREIFUS, T. Os polinômios no currículo da escola média. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A.P. As ideias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo,Atual, 1995. p.127-134.

ENGLISH, L.; SRIRAMANN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMANN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). Theories of mathematics education: seeking new frontiers. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010. p.263-290.

FLORES, A. Cálculo de raízes de polinômios com computador. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A.P. As ideias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo,Atual, 1995. p.188-194.

FREIRE, P.; GUIMARÃES, S. Aprendendo com a própria história. 3 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2021.

GARBI, G. G. O romance das equações algébricas: a história da álgebra. São Paulo: Makron Books, 1997.

JURADO, U. M., Problem posing: an overview for further progress. In: LILJEDAHL, P. et al. Problem solving in mathematics education. Hamburg. Germany. University of Hamburg, 2016. p.p.31-35. DOI 10.1007/978-3-319-40730-2. ISBN 978-3-319-40729-6.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p.257-273.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Caderno do professor: matemática, ensino médio – 3ª série, 2º bimestre. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, L. M. Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas. Campina Grande (PB): Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2013, p.306. (Dissertação de Mestrado)

SILVA, L. M.; ANDRADE, S. Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição de problemas. Caminhos da Educação em Revista, Aracaju, v.1, n. 9, 2016. p.57-69. ISSN 1983-7399.

SILVA, L. M.; SILVA, J. S. N; NEVES, S. M. Equações polinomiais em livros didáticos no ensino médio: exploração, resolução e proposição de problemas. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v.8, n.8, p.55026-55038, aug., 2022. DOI: 10.34117/bjdv8n8-022.