

## **Fractais no ensino médio: Uma proposta para auxiliar no ensino da geometria**

**Aline Picoli Sonza**

Instituto Federal Sul Riograndense – R/S

### **RESUMO**

Ao longo de muito tempo a geometria euclidiana foi responsável por descrever, analisar e explicar tudo que nos rodeia. Entretanto, devido à complexidade do mundo que não se resume a pontos, retas, planos e algumas formas regulares com o passar do tempo essa geometria passou a ser considerada insuficiente. Outras geometrias foram surgindo ao longo de séculos e foram classificadas como não-euclidianas, entre elas, a geometria dos fractais. São inúmeras as contribuições desta geometria para diversas áreas do conhecimento. Na Biologia, por exemplo, podemos compreender melhor o crescimento das plantas, o estudo de superfícies irregulares na física, o detalhamento da anatomia interna do corpo humano e análise de alguns tipos de câncer para a Medicina estão entre estas contribuições.

**Palavras-chave:** Geometria Euclidiana, Fractais, Ensino de matemática.

### **1 INTRODUÇÃO**

Ao longo de muito tempo a geometria euclidiana foi responsável por descrever, analisar e explicar tudo que nos rodeia. Entretanto, devido à complexidade do mundo que não se resume a pontos, retas, planos e algumas formas regulares com o passar do tempo essa geometria passou a ser considerada insuficiente. Outras geometrias foram surgindo ao longo de séculos e foram classificadas como não-euclidianas, entre elas, a geometria dos fractais. São inúmeras as contribuições desta geometria para diversas áreas do conhecimento. Na Biologia, por exemplo, podemos compreender melhor o crescimento das plantas, o estudo de superfícies irregulares na física, o detalhamento da anatomia interna do corpo humano e análise de alguns tipos de câncer para a Medicina estão entre estas contribuições.

Além de todas as aplicações no campo das ciências, os fractais são considerados muito importantes no ensino de vários tópicos na matemática e podem contribuir com o estudo de funções, sequências, progressões aritméticas e geométricas, formas geométricas, perímetro, área, volume, simetria e noções de limites, entre vários outros.

Por causa da ampla possibilidade de abordagem da geometria fractal, da sua diversidade de formas e cores ela pode ser associada ao uso de construções e exploração da criatividade além de possibilitar o uso do computador o que, geralmente, desperta o interesse, a curiosidade e a atenção dos alunos. Sallum (2005), afirma que ao introduzir o estudo dos fractais no ensino médio o professor estará satisfazendo a curiosidade daqueles que já ouviram falar neles e, também



propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas. (SALLUM, 2005, p. 1)

Percebemos facilmente que grande parte das criações feitas pelo homem são baseadas na Geometria Euclidiana. Comumente é possível identificar construções baseadas em prismas, cilindros, cones, ou pirâmides, por exemplo. Pelo fato de a geometria euclidiana, ao longo de muitos séculos, ter servido para descrever as formas presentes na natureza, também serviram de inspiração para arquitetos e engenheiros em seus projetos de monumentos, prédios ou construções de modo geral. Entretanto, com a percepção de que a Geometria Euclidiana não conseguia contemplar todas as formas presentes na natureza, surgiu a geometria fractal. Ou seja, a partir da necessidade de descrever e explicar fenômenos da natureza ou objetos que não possuem forma definida surgiu a geometria dos fractais. De forma geral, é possível classificá-la como uma geometria que apresenta estruturas geometricamente complexas, infinitamente variadas e que estuda o comportamento dos chamados fractais.

O matemático francês Benoit Mandelbrot (1975) é considerado o pai dos fractais por ter dado nome a eles. Do latim *fractus*, o termo fractal surgiu referindo-se a ‘irregular’ ou ‘quebrado’ e do verbo correspondente *frangere* que significa quebrar ou criar fragmentos irregulares. Há indícios de que estudos sobre fractais foram realizados anteriores ao século XX, mas não possuíam valor científico e foram chamados de ‘monstros matemáticos’ ou ‘demônios’. Mandelbrot, entretanto utilizou algumas destas pesquisas já iniciadas mas que não haviam sido concluídas em seus estudos sobre os fractais.

Existem várias definições para os fractais, embora nenhuma delas seja absoluta. Mandelbrot (1998) propõe a discussão questionando a necessidade de definir rigorosamente um fractal e afirma que qualquer definição poderia ser precoce e, portanto, deveria permanecer aberta e intuitiva para ser aprimorada continuamente.

Embora a definição de fractais ainda esteja em aberto, é possível identificá-los por suas características uma vez que mantêm suas formas mesmo alterando a escala sob a qual são analisados. Em outras palavras, é possível ampliar ou reduzir centenas de vezes um fractal e ele permanecerá com as suas características originais.

A afirmação de Mandelbrot nos remete a análise da importância do surgimento do estudo da geometria dos fractais para compreensão do mundo que nos cerca. Mandelbrot (1998) afirma que “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves nem o raio se propaga em linha reta”. (MANDELBROT, 1998, p. 468)



O ensino e a aprendizagem da matemática também pode ser algo capaz de trazer o sentimento de satisfação. Barbosa (2002) afirma que a Matemática proporciona ao matemático, ao professor e também deve permitir ao educando, formas de satisfação relacionadas modos de pensar, ver ou agir.

Muitas vezes eles emergem de superação de dificuldades; assim é, por exemplo, o estado prazeroso emergente da simples busca com sucesso das raízes na resolução de uma equação ou de uma situação-problema numérica ou geométrica cuja solução leva a encontrar apenas alguns números ou determinados pontos de um plano. (BARBOSA, 2002, p. 13)

Sob esta ótica, é possível imaginar o quanto o estudo dos fractais pode ir ao encontro do desejo do professor em proporcionar ao estudante o estudo de uma matemática mais interessante e instigante. Silva (2011) destaca algumas atividades envolvendo os fractais como fascinantes por causa das suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. No estudo do funcionamento de sistemas dinâmicos e complexos como a formação de nuvens, sua importância no diagnóstico do câncer pois auxilia na medição da tortuosidade da borda em que o tumor se encontra. Além de auxiliar, também na medicina veterinária, no mercado financeiro ou de ações, contribui na área das artes criando, com o auxílio do computador, desenhos abstratos e músicas a partir das cores dos fractais gerados.

## **2 OBJETIVO**

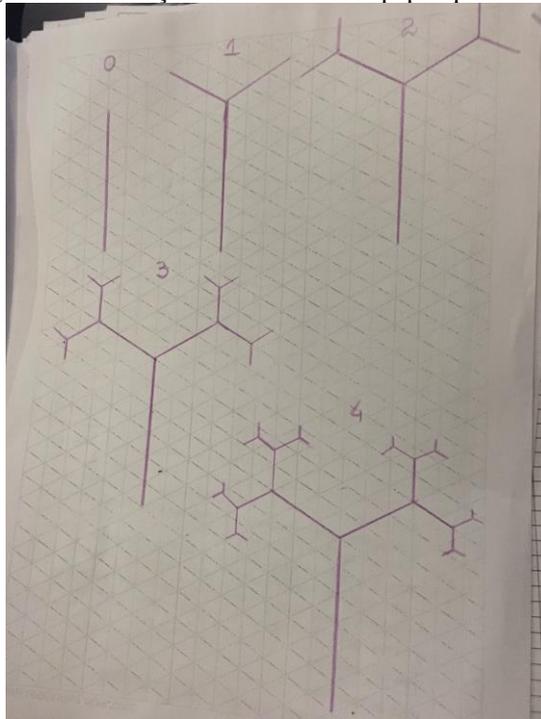
Diante de tudo que nos cerca, das evoluções tecnológicas e dos avanços científicos, não podemos restringir o estudo da geometria a alguns conceitos primitivos e que não conseguem dar conta de explicar o mundo como ele se apresenta aos olhos dos estudantes. Por todas as contribuições que o estudo da geometria dos fractais pode trazer ao ensino de matemática no nível médio e das possíveis contextualizações com outras áreas do conhecimento, foi elaborada uma sequência didática contendo parte introdutória, construções de fractais, análise e aplicação de fórmulas e, por último, uma avaliação. Esta sequência didática foi implementada em uma turma de segundo ano de ensino médio com o objetivo de tornar o estudo da geometria mais atrativa e interessante para o aluno.

A geometria dos fractais não faz parte do currículo do ensino médio na instituição onde a atividade foi realizada, entretanto a implementação da sequência didática foi possível utilizando algumas horas-aula de matemática paralelamente ao estudo da geometria espacial. Percebendo, ao longo de anos, que a geometria espacial é um tema que traz consigo um certo temor e bastante dificuldades por parte dos estudantes, a sequência didática foi construída com o objetivo de introduzir noções da geometria dos fractais para que os alunos possam, através da construção de fractais, identificar e explorar suas características e reconhecê-los no seu cotidiano, bem como explorar e aplicar conteúdos matemáticos já estudados.

### 3 METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

A implementação da sequência didática obedeceu a seguinte organização: na primeira aula houve a discussão sobre formas geométricas na natureza baseadas na geometria euclidiana e seus limites, a apresentação de objetos e imagens de fractais, enfatizando a importância do estudo da geometria não-euclidiana. No segundo período os estudantes receberam papel quadriculado para iniciarem, conforme instruções, o esboço de alguns fractais. Em seguida, os alunos iniciaram as construções de fractais utilizando papel quadriculado, réguas, transferidor e compasso. As construções foram baseadas em orientações fornecidas e inspiradas nas sugestões de atividades de Silva (2011). Neste momento, houve a explicação sobre as construções e análise direcionando à aplicação dos fractais a tópicos estudados na Matemática do Ensino Médio. Os alunos efetuaram medições com réguas e fizeram seus registros para posterior discussão.

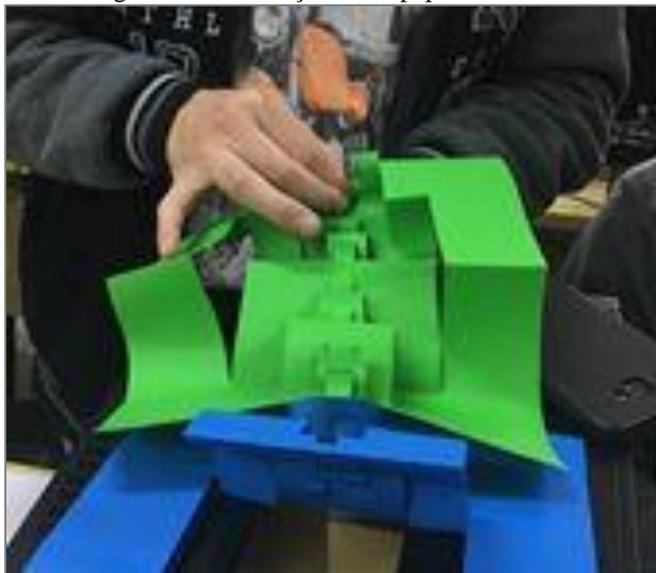
Figura 1: Construções de fractais com papel quadriculado



Fonte: própria autora

As questões propostas aos alunos tinham o objetivo de levá-los às conclusões a respeito das características dos fractais e das relações com tópicos já estudados na matemática. Na aula seguinte os estudantes puderam construir os fractais com papel dobradura colorido. Cada estudante escolheu o fractal que gostaria de construir e recebeu as instruções correspondentes. Para este momento, foram disponibilizadas duas horas-aula. A Figura 2 é a imagem de uma construção feita pelos alunos em papel dobradura.

Figura 2 – Construções com papel dobradura.



Fonte: própria autora

No encontro seguinte aconteceu a etapa final na qual os alunos foram convidados a registrar suas observações, percepções e tudo mais que quisessem sobre a realização das atividades. Os estudantes foram questionados sobre os seguintes aspectos: importância da realização da atividade; o que achou mais interessante; se conseguiu perceber a relação dos fractais com conteúdos estudados e entre eles quais o estudo de fractais poderia auxiliar. Por fim, os estudantes expuseram suas impressões sobre a atividade.

Ao longo dos momentos que envolveram a construções de fractais, tanto com papel quadriculado quanto com o papel dobradura, alguns alunos demonstraram maior habilidade enquanto outros precisaram de auxílio da professora ou de colegas. Os estudantes foram percebendo, ao longo das construções, que não poderiam fazer recortes de qualquer maneira e que tudo precisava ser medido e/ou calculado. Ao final, todos conseguiram concluir suas construções.

Analisando as respostas dos alunos aos questionamentos realizados na última etapa foi possível perceber que todos consideraram importante a realização da atividade e destacaram muitos pontos interessantes. As relações com os tópicos estudados foram citados embasados nos comentários realizados ao longo das atividades. Alguns relatos dos estudantes a respeito da realização da atividade:

“Nunca imaginei que isso era fractal. E música então, nunca mesmo. Achei tão interessante que a matemática podia ser só assim, com coisas que despertem a nossa atenção mas que são importantes de estudar.” (Aluno A).

“Nunca tinha parado pra pensar que tem muita coisa que a geometria da escola não explica. Eu gosto muito de geometria principalmente espacial e achei essas aulas muito interessantes. Mas achei difícil alguns cálculos também.” (Aluno B).

“Achei importante estudar isso. Já tinha visto uma questão no ENEM e minha mão tinha me explicado um pouco, mas não tinha entendido muito bem. Queria que tivesse outras aulas assim.” (Aluno C).



Analisando a realização da atividade como um todo, é possível destacar vários aspectos que demonstram um retorno bastante positivo. O fato de ser um tema que provoca curiosidade e encantamento reflete no interesse instantâneo e no contínuo envolvimento dos estudantes.

### **3 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

É possível destacar muitos pontos positivos, relacionados ao ensino, aprendizagem e ao fato de que são muitas as áreas do conhecimento envolvidas que poderiam ser integradas no desenvolvimento de atividades como esta, e são capazes de justificar a introdução da geometria dos fractais no ensino médio.

O perfil de aluno da atualidade aponta para a necessidade de o professor repensar métodos e metodologias de ensino que sejam capazes de despertar o interesse, a criatividade, a criticidade, a autonomia e a capacidade de colocar em prática o que é trabalhado em sala de aula.

O desenvolvimento e a implementação desta sequência didática demonstraram o quanto pode ser compensador o ensino quando estruturado com o foco no aluno e na sua aprendizagem. Como uma via de mão dupla na qual o aluno participa do processo e o professor se motiva a buscar outras formas para ensinar a matemática.



## REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrimos a Geometria Fractal - para a sala de aula. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

CANDAU, Vera Maria. Educação em Direitos Humanos: uma proposta de trabalho. In: CANDAU, Vera Maria, ZENAIDE, Maria Nazaré. Oficinas Aprendendo e Ensinando Direitos Humanos, João Pessoa: Programa Nacional de Direitos Humanos; Secretaria da Segurança Pública do estado da Paraíba; Conselho Estadual da Defesa dos Direitos do Homem e do Cidadão, 1999.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. Geometria Fractal: Perspectivas e Possibilidades para o Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado. Belém/PA. 2005. Disponível em: [http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao\\_GeometriaFractalPerpectivas.pdf](http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao_GeometriaFractalPerpectivas.pdf)  
Acesso em: ago. 2023

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais. 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: [http://www.sapientia.pucsp.br//tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=4953](http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953) . Acesso em: ago. 2023

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Sergio Lorenzato (org.) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MANDELBROT, Benoît. Objetos Fractais. Forma, Acaso e Dimensão. Texto Original: *Les Objects Fractals*. 1975, 1984, 1989. Tradução: maio de 1998. Portugal, Lisboa: Ciência Aberta. Gradiva. 2ª ed. 1998.

RÊGO, Rômulo Marinho; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Sergio Lorenzato (org.) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SALLUM, Elvia Mureb. Fractais no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática – RPM 57. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. 1 ed. – Curitiba, PR: CRV, 2011

VARGAS, Andressa Franco; SILVA, Bianca Bitencourt da; LIRA, Clarissa Gonçalves; LOPES, Mirian Marchezan. Aprendendo Matemática através dos fractais: Uma experiência no Ensino Médio. Anais... XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Vera. Oficinas de ensino: O quê? Por quê? Como? 4. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.